

分析知识大纲

本文整理大学数学系需要掌握的分析学主线。这里的“分析”包括数学分析、实分析、复分析、泛函分析，以及它们和微分方程、概率论、几何的接口。

分析学的核心问题是：研究极限过程。只要出现“无限逼近”“连续变化”“无穷级数”“函数列”“积分”“微分方程”，就会进入分析学的范围。

目录

1. 总体逻辑	3
2. 实数系和完备性	3
2.1. 为什么需要实数	3
2.2. 上确界性质	3
2.3. Cauchy 完备性	4
2.4. 单调收敛定理	4
2.5. 逻辑关系	4
3. 数列、函数极限和连续性	4
3.1. 数列极限	4
3.2. 函数极限	4
3.3. 连续性	4
3.4. 闭区间上的连续函数	5
3.5. 逻辑关系	5
4. 微分：局部线性化	5
4.1. 导数	5
4.2. 基本求导公式	5
4.3. 中值定理	5
4.4. 多元微分	6
4.5. 逻辑关系	6
5. Riemann 积分和基本定理	6
5.1. Riemann 积分	6
5.2. 微积分基本定理	7
5.3. 常用积分方法	7
5.4. 反常积分	7
5.5. 逻辑关系	7
6. 级数和函数列	8
6.1. 数项级数	8
6.2. 常用判别法	8
6.3. 函数列和一致收敛	8
6.4. 幂级数	9
6.5. 逻辑关系	9
7. 度量空间和拓扑语言	9
7.1. 度量空间	9
7.2. 开集、闭集和紧集	10
7.3. 完备性和压缩映射	10
7.4. 逻辑关系	10
8. 测度和 Lebesgue 积分	10

8.1.	测度空间	10
8.2.	可测函数	11
8.3.	Lebesgue 积分	11
8.4.	三大收敛定理	11
8.5.	L_p 空间	11
8.6.	逻辑关系	12
9.	Fourier 分析	12
9.1.	Fourier 级数	12
9.2.	Fourier 变换	12
9.3.	Parseval 公式	13
10.	复分析	13
10.1.	复可微和解析函数	13
10.2.	Cauchy 积分理论	13
10.3.	Laurent 级数和留数	14
10.4.	逻辑关系	14
11.	泛函分析	14
11.1.	赋范空间和 Banach 空间	14
11.2.	内积空间和 Hilbert 空间	14
11.3.	有界线性算子	15
11.4.	三大基本定理	15
11.5.	逻辑关系	15
12.	微分方程接口	15
12.1.	常微分方程	15
12.2.	偏微分方程	16
12.3.	弱解思想	16
12.4.	逻辑关系	16
13.	与其他数学分支的关系	16
13.1.	和概率论	16
13.2.	和几何	16
13.3.	和代数	17
13.4.	和计算	17
14.	推荐学习顺序	17

1. 总体逻辑

分析学的主线可以这样组织：

1. 实数完备性
2. 极限
3. 连续
4. 微分
5. 积分
6. 级数
7. 一致收敛
8. 度量空间
9. 测度和 Lebesgue 积分
10. 函数空间
11. 泛函分析、复分析、PDE

其中最核心的抽象是：

- 极限是分析学的基本语言。
- 实数完备性保证很多极限对象确实存在。
- 连续性说明函数和极限可以交换。
- 微分研究局部线性近似。
- 积分研究整体累积。
- 一致收敛控制函数列极限能否保留连续、可微、可积等性质。
- 测度论把“长度、面积、体积、概率”统一为集合函数。
- 泛函分析把函数看成向量空间中的点。

最小闭环：

1. 完备性
2. 极限存在
3. 连续性
4. 紧性
5. 一致控制

这个闭环贯穿数学分析、实分析、泛函分析和偏微分方程。

2. 实数系和完备性

2.1. 为什么需要实数

有理数不足以承载分析学，因为很多自然极限不落在有理数中。例如：

$$x_n^2 \rightarrow 2 \tag{1}$$

在 $\mathbb{Q}$ 中没有极限 $\sqrt{2}$ 。所以分析学需要 $\mathbb{R}$ 的完备性。

2.2. 上确界性质

实数完备性的常用表述是上确界性质：

$$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, A \text{ 有上界} \Rightarrow \exists \sup A \in \mathbb{R} \tag{2}$$

下确界类似：

$$\inf A = -\sup(-A) \quad (3)$$

2.3. Cauchy 完备性

数列 (x_n) 是 Cauchy 列, 如果:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq N, |x_m - x_n| < \varepsilon \quad (4)$$

实数完备性等价于:

$$(x_n) \text{ 是 Cauchy 列} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x_n \rightarrow x \quad (5)$$

2.4. 单调收敛定理

若 (x_n) 单调递增且有上界, 则:

$$x_n \rightarrow \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (6)$$

若 (x_n) 单调递减且有下界, 则:

$$x_n \rightarrow \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (7)$$

2.5. 逻辑关系

- 上确界性质是很多存在性定理的源头。
- Cauchy 完备性说明“内部越来越接近”的序列确实有极限。
- Bolzano-Weierstrass、闭区间套、Heine-Borel 等定理都依赖完备性。

3. 数列、函数极限和连续性

3.1. 数列极限

数列极限定义:

$$x_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |x_n - a| < \varepsilon \quad (8)$$

常用极限运算:

$$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow a + b \quad (9)$$

$$x_n y_n \rightarrow ab \quad (10)$$

若 $b \neq 0$ 且 $y_n \neq 0$, 则:

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (11)$$

3.2. 函数极限

函数极限定义:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (12)$$

表示:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (13)$$

3.3. 连续性

函数 f 在 a 处连续:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (14)$$

等价的序列刻画：

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a) \quad (15)$$

3.4. 闭区间上的连续函数

若 f 在 $[a, b]$ 上连续，则：

最大最小值定理：

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b], f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad (16)$$

介值定理：

$$f(a) \leq y \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], f(c) = y \quad (17)$$

一致连续：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (18)$$

3.5. 逻辑关系

- 极限是连续性的基础。
- 连续函数把接近的输入送到接近的输出。
- 紧集上的连续函数有更强性质：有界、取到最大最小值、一致连续。

4. 微分：局部线性化

4.1. 导数

一元函数导数：

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (19)$$

导数表示函数在一点附近的最佳线性近似：

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \quad (20)$$

4.2. 基本求导公式

乘积法则：

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (21)$$

链式法则：

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (22)$$

反函数求导：

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x) \quad (23)$$

4.3. 中值定理

Rolle 定理：

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b), f'(c) = 0 \quad (24)$$

Lagrange 中值定理:

$$\exists c \in (a, b), f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (25)$$

Taylor 公式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)} \frac{a}{k!} (x - a)^k + R_{n(x)} \quad (26)$$

Lagrange 余项:

$$R_{n(x)} = f^{(n+1)} \frac{\xi}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \quad (27)$$

4.4. 多元微分

偏导:

$$\partial_i f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} \quad (28)$$

梯度:

$$\text{grad } f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) \quad (29)$$

全微分:

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)h + o(\|h\|) \quad (30)$$

Jacobian 矩阵:

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \partial \frac{f_1}{\partial} x_1 & \dots & \partial \frac{f_1}{\partial} x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial \frac{f_m}{\partial} x_1 & \dots & \partial \frac{f_m}{\partial} x_n \end{pmatrix} \quad (31)$$

Hessian 矩阵:

$$H_{f(a)} = (\partial_i \partial_j f(a))_{i,j} \quad (32)$$

4.5. 逻辑关系

- 导数是函数的局部线性近似。
- 中值定理把局部导数信息转化为整体函数信息。
- Taylor 公式把函数近似为多项式，是分析估计和数值计算的基础。
- 多元微分把“局部线性化”从斜率推广为线性映射。

5. Riemann 积分和基本定理

5.1. Riemann 积分

划分:

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (33)$$

Riemann 和:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (34)$$

若划分越来越细时 Riemann 和趋于同一极限, 则定义:

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (35)$$

5.2. 微积分基本定理

若 f 连续, 定义:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad (36)$$

则:

$$F'(x) = f(x) \quad (37)$$

若 $F' = f$, 则:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad (38)$$

5.3. 常用积分方法

换元公式:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx \quad (39)$$

分部积分:

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du \quad (40)$$

5.4. 反常积分

无穷区间:

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx \quad (41)$$

奇点:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) \, dx \quad (42)$$

5.5. 逻辑关系

- Riemann 积分把曲线下方面积定义为极限。
- 微积分基本定理说明微分和积分互为逆过程。
- 反常积分把积分扩展到无界区间和无界函数。

6. 级数和函数列

6.1. 数项级数

级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (43)$$

部分和：

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n \quad (44)$$

级数收敛定义：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow s_N \text{ 有极限} \quad (45)$$

必要条件：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \quad (46)$$

绝对收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \quad (47)$$

6.2. 常用判别法

比较判别：

$$0 \leq a_n \leq b_n, \sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty \quad (48)$$

比值判别：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ 绝对收敛} \quad (49)$$

根值判别：

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ 绝对收敛} \quad (50)$$

交错级数判别：

$$a_n \text{ decreases to } 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ 收敛} \quad (51)$$

6.3. 函数列和一致收敛

逐点收敛：

$$f_{n(x)} \rightarrow f(x) \text{ 对每个 } x \quad (52)$$

一致收敛：

$$\sup_{x \in E} |f_{n(x)} - f(x)| \rightarrow 0 \quad (53)$$

Weierstrass 判别法:

$$|f_{n(x)}| \leq M_n, \sum M_n < \infty \Rightarrow \sum f_n \text{ 一致收敛} \quad (54)$$

一致极限定理:

$$f_n \text{ 连续且 } f_n \rightarrow f \text{ 一致} \Rightarrow f \text{ 连续} \quad (55)$$

逐项积分:

$$f_n \rightarrow f \text{ 一致} \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad (56)$$

逐项求导的常用条件:

$$f_{n'} \rightarrow g \text{ 一致, 且 } f_{n(x_0)} \text{ 收敛} \Rightarrow f_n \rightarrow f, f' = g \quad (57)$$

6.4. 幂级数

幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad (58)$$

收敛半径:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (59)$$

在收敛区间内部可以逐项求导和逐项积分:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (60)$$

6.5. 逻辑关系

- 级数是无限加法, 必须用极限定义。
- 绝对收敛比条件收敛稳定。
- 一致收敛控制“极限函数是否保留原函数性质”。
- 幂级数把分析函数和代数运算联系起来。

7. 度量空间和拓扑语言

7.1. 度量空间

度量空间是集合 X 加上距离函数:

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (61)$$

满足:

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (62)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (63)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (64)$$

开球:

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad (65)$$

7.2. 开集、闭集和紧集

开集: 每个点都有一个小开球仍在集合内。

闭集: 包含自己的所有极限点。

紧集的开覆盖定义:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n, K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad (66)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中, Heine-Borel 定理:

$$K \text{ 紧} \Leftrightarrow K \text{ 闭且有界} \quad (67)$$

7.3. 完备性和压缩映射

度量空间中的 Cauchy 列:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (68)$$

完备性:

$$\text{每个 Cauchy 列都收敛到空间中的点} \quad (69)$$

压缩映射:

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y), \quad 0 < q < 1 \quad (70)$$

Banach 不动点定理:

$$\exists! x^* \in X, \quad Tx^* = x^* \quad (71)$$

7.4. 逻辑关系

- 度量空间把极限、连续、紧性从实数推广到抽象空间。
- 紧性是“有限性”的分析版本。
- 完备性保证迭代和极限过程不跑出空间。
- Banach 不动点定理是微分方程存在唯一性和数值迭代的基础。

8. 测度和 Lebesgue 积分

8.1. 测度空间

测度空间:

$$(X, \mathcal{F}, \mu) \quad (72)$$

测度满足:

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (73)$$

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{当} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (74)$$

概率测度是总质量为 1 的测度:

$$\mu(X) = 1 \quad (75)$$

8.2. 可测函数

函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测, 如果:

$$\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (76)$$

8.3. Lebesgue 积分

非负简单函数:

$$s = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} \quad (77)$$

其积分定义为:

$$\int s \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) \quad (78)$$

非负可测函数:

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ 简单} \right\} \quad (79)$$

一般函数分解为:

$$f = f^+ - f^- \quad (80)$$

若:

$$\int f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{且} \quad \int f^- \, d\mu < \infty \quad (81)$$

则 f 可积。

8.4. 三大收敛定理

单调收敛定理:

$$0 \leq f_n \text{ increases to } f \Rightarrow \int f_n \, d\mu \rightarrow \int f \, d\mu \quad (82)$$

Fatou 引理:

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \quad (83)$$

支配收敛定理:

$$f_n \rightarrow f \text{ a.e., } |f_n| \leq g, \int g \, d\mu < \infty \Rightarrow \int f_n \, d\mu \rightarrow \int f \, d\mu \quad (84)$$

8.5. L^p 空间

$$L^p \quad (85)$$

范数:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (86)$$

$$L^\infty \quad (87)$$

范数:

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup} |f| \quad (88)$$

Holder 不等式:

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (89)$$

Minkowski 不等式:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (90)$$

8.6. 逻辑关系

- 测度论把长度、面积、体积、概率统一起来。
- Lebesgue 积分比 Riemann 积分更适合处理极限。
- 三大收敛定理回答“什么时候极限和积分可以交换”。
- L^p 空间把可积函数组织成向量空间，是泛函分析和 PDE 的基础。

9. Fourier 分析

9.1. Fourier 级数

周期函数可以尝试展开为三角级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (91)$$

系数:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (92)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (93)$$

复数形式:

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad (94)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (95)$$

9.2. Fourier 变换

Fourier 变换:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (96)$$

反演公式：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (97)$$

卷积：

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (98)$$

卷积定理：

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \quad (99)$$

导数和频率：

$$\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi) \quad (100)$$

9.3. Parseval 公式

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \quad (101)$$

Fourier 分析的核心思想是：把函数分解到频率空间中，使微分、卷积、平移等操作变得更简单。

10. 复分析

10.1. 复可微和解析函数

复导数：

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (102)$$

这个极限要求 h 从复平面任意方向趋向 0，因此比实可微强很多。

Cauchy-Riemann 方程。若 $f = u + iv$ ，则：

$$\partial \frac{u}{\partial} x = \partial \frac{v}{\partial} y \quad (103)$$

$$\partial \frac{u}{\partial} y = -\partial \frac{v}{\partial} x \quad (104)$$

10.2. Cauchy 积分理论

Cauchy 积分定理：

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (105)$$

Cauchy 积分公式：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (106)$$

高阶导数公式：

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (107)$$

10.3. Laurent 级数和留数

Laurent 展开:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (108)$$

留数:

$$\text{Res}(f, a) = a_{-1} \quad (109)$$

留数定理:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, a_k) \quad (110)$$

10.4. 逻辑关系

- 复可微远强于实可微，通常推出解析性。
- Cauchy 积分公式说明函数内部值由边界值决定。
- 留数定理把复杂积分转化为孤立奇点处的局部信息。

11. 泛函分析

11.1. 赋范空间和 Banach 空间

赋范空间:

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (111)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (112)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (113)$$

Banach 空间是完备的赋范空间。

常见例子:

$$L^p, C([a, b]), \ell^p \quad (114)$$

11.2. 内积空间和 Hilbert 空间

内积记作:

$$(x, y) \quad (115)$$

满足线性、共轭对称和正定性。

范数由内积诱导:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (116)$$

Cauchy-Schwarz:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (117)$$

Hilbert 空间是完备内积空间。

正交投影：

$$x = P_M x + (x - P_M x), \quad x - P_M x \text{ perpendicular to } M \quad (118)$$

11.3. 有界线性算子

线性算子：

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y \quad (119)$$

有界性：

$$\exists C, \|Tx\| \leq C\|x\| \quad (120)$$

算子范数：

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \quad (121)$$

有界和连续等价：

$$T \text{ 有界} \Leftrightarrow T \text{ 连续} \quad (122)$$

11.4. 三大基本定理

Hahn-Banach 定理：有界线性泛函可以延拓，并保持范数。

开映射定理：Banach 空间之间的满射有界线性算子是开映射。

一致有界原理：

$$\forall x, \sup_{\alpha} \|T_{\alpha} x\| < \infty \Rightarrow \sup_{\alpha} \|T_{\alpha}\| < \infty \quad (123)$$

11.5. 逻辑关系

- 泛函分析把函数当成无限维向量空间中的点。
- 完备性保证极限过程可控。
- Hilbert 空间把几何直觉推广到无限维。
- 算子理论是微分方程、量子力学、数值分析的共同语言。

12. 微分方程接口

12.1. 常微分方程

初值问题：

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (124)$$

积分形式：

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \quad (125)$$

Picard 迭代：

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) \, ds \quad (126)$$

存在唯一性通常由 Banach 不动点定理推出。

12.2. 偏微分方程

Laplace 方程：

$$\Delta u = 0 \quad (127)$$

热方程：

$$\partial_t u = \Delta u \quad (128)$$

波动方程：

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u \quad (129)$$

Poisson 方程：

$$-\Delta u = f \quad (130)$$

12.3. 弱解思想

经典解要求函数足够光滑。弱解通过分部积分降低可微性要求。

例如 Poisson 方程的弱形式：

$$\int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \quad (131)$$

12.4. 逻辑关系

- ODE 把微积分和不动点理论联系起来。
- PDE 需要 Fourier 分析、泛函分析、Sobolev 空间和弱解。
- 分析学中的紧性、完备性、估计，是证明解存在性的核心工具。

13. 与其他数学分支的关系

13.1. 和概率论

概率论可以看作测度空间上的分析：

$$E[X] = \int_{\Omega} X \, dP \quad (132)$$

大数定律、中心极限定理、鞅收敛，都依赖极限和积分交换。

13.2. 和几何

微分几何大量使用多元分析：

- 切空间来自局部线性化。
- 微分形式推广积分。
- Stokes 定理统一 Newton-Leibniz、Green、Gauss、Stokes 公式。

统一形式：

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (133)$$

13.3. 和代数

复分析和代数几何通过解析函数、多项式零点、Riemann 曲面联系。

泛函分析中的算子代数把代数结构和拓扑、范数、谱理论结合起来。

13.4. 和计算

数值分析本质上是“有限计算如何逼近无限对象”：

- 误差估计来自 Taylor 公式。
- 收敛性来自极限理论。
- 稳定性来自范数和算子估计。
- PDE 数值解依赖弱形式和函数空间。

14. 推荐学习顺序

1. 实数完备性、数列极限、函数极限、连续性。
2. 一元微分、Riemann 积分、微积分基本定理。
3. 级数、函数列、一致收敛、幂级数。
4. 多元微分、重积分、曲线曲面积分。
5. 度量空间、紧性、完备性、压缩映射。
6. 测度论、Lebesgue 积分、 L^p 空间。
7. Fourier 分析、复分析。
8. 泛函分析、Sobolev 空间、偏微分方程。

学习分析时可以反复追问：

- 这个极限是否存在？
- 是否唯一？
- 能否和函数、积分、导数、求和交换？
- 需要什么一致性或支配条件？

如果能围绕这些问题组织知识，分析学的大部分结构就能串起来。