

复变函数

从动机到本科基础

给计算机专业读者的数学讲义 · 含 Python 实验

第一章保留原来的动机驱动大纲：先知道问题在哪里，再知道工具为什么值得学。第二至十章以数学系本科复分析课程为骨架，补充基础概念、定理条件、代表性证明与例题。第十一章提供可运行的计算实验，附录给习题提示和后续学习路径。

阅读约定

“证明”给出该结论在本文范围内的完整论证；“证明思路”只交代主要步骤；“定理（不证）”表示明确引用尚未证明的结果。图和浮点计算用来探索、检查和发现反例，不承担证明的职责。

这是入门讲义，不是完整的数学分析教材。开始前应能理解极限、连续、导数、定积分、级数，以及二维偏导数与矩阵。第二章补充复平面中必要的拓扑与一致收敛概念。对暂时陌生的证明，可先读定义和例题，再回看证明。

课程范围的依据

主题选择参照 [UC Berkeley Math 185 本科课程大纲](#)：全纯函数、复积分、幂级数、孤立奇点、留数、绕数与零点计数，并包括调和函数和保角映射。本讲义自行安排顺序、证明和例题，不照搬其课时安排。生成函数、FFT 与数值求导作为面向计算机专业的连接案例。

如何使用配套文件

`python/experiments.py` 生成所有实验图和 `results.json`；`figures/` 中已包含运行结果，可直接编译本文。全部章节与样式统一放在 `complex-analysis.typst` 中。

目录

1 动机与全景	3
2 复数、复平面与分析预备	13
3 复可微、全纯函数与初等函数	15
4 复积分与柯西积分定理	17
5 柯西积分公式与解析函数的刚性	19
6 幂级数、洛朗展开与孤立奇点	21
7 留数定理与实积分	23
8 辐角原理、儒歇定理与零点计数	25
9 保角映射与复平面的几何	27
10 调和函数与边界值问题	29
11 Python 实验：让定义与定理变得可观察	31
附录：习题提示与课程复习	37

理论的依赖顺序

复平面与极限 → 复可微与全纯 → 复积分与柯西定理 → 柯西公式 → 泰勒与洛朗展开 → 奇点与留数 → 辐角原理与儒歇定理。保角映射和调和函数再从解析性的几何与偏微分方程两个方向展开。

1 动机与全景

本章保留最初的动机大纲，拟回答三个问题：**为什么要把实数问题搬到复数世界？复可微这个条件为什么如此强大？它究竟让哪些问题变得可解、可算或可理解？** 每章都从一个障碍出发，再引入概念，最后落到实例与实验。这里先给出全景；从第二章开始，按本科数学系课程顺序讲解基本理论。

读者起点与目标

默认你学过高等数学、线性代数和基本算法，见过泰勒级数、矩阵特征值、递推式与大 O 记号；不要求学过实分析、抽象代数或信号与系统。曲线积分、偏导数和常微分方程在使用时补充。统一用 i 表示虚数单位，工程资料中的 j 是同一对象。

贯穿全文的主线

扩充数系，让代数与旋转统一 → 用复指数组织振荡 → 用解析性约束局部行为 → 用边界积分获得内部信息 → 用奇点解释收敛、增长与稳定性。

本章的主题地图

主题	从什么问题出发	获得什么能力
1—2	方程、旋转、振荡	理解复数与复指数为何是自然的计算语言
3	二维函数为何会特别刚性	理解解析性与柯西-黎曼条件
4—5	边界、积分与级数收敛	把局部、整体和奇点联系起来
6—7	积分难算，函数绕圈后变值	掌握留数、支路与解析延拓的动机
8	递推计数如何得到渐近规律	从生成函数的奇点读取增长
9	滤波与反馈系统是否稳定	用极点、零点和绕数判断系统行为
10—11	复杂边界与数值求导	理解保角映射及复步长法的适用范围

三个反复回访的锚点

- **数学锚点：** $\frac{1}{1+z^2}$ 在整个实轴上都很平滑，为什么它在零点的泰勒级数只在 $|x| < 1$ 收敛？
- **算法锚点：** 为什么一类括号串／树结构的数量会出现 $4^n n^{-\frac{3}{2}}$ ，而不只是笼统的“指数增长”？
- **工程锚点：** 一个只有几行代码的递归滤波器，为什么会衰减、共振或发散？

1.1 为什么要发明复数？

1.1.1 实数答案，为什么要绕道虚数？

出发问题。若只是 $x^2 + 1 = 0$ 无解，我们可以承认它没有实数解。更强的动机是：某些三次方程明明有实数解，求根公式却会在中途产生负数的平方根。

用 $x^3 = 15x + 4$ 作为开篇故事。卡尔达诺公式引出两个立方根，其立方分别为 $2 + 11i$ 和 $2 - 11i$ ；取相容的根，可验证：

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i, \quad (2 - i)^3 = 2 - 11i, \quad (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

先不证明三次方程式，只核验这组运算。困难由“最后的答案不存在”变成了“中间表达式需要更大的数系”。邦贝利在 16 世纪系统处理这种运算，是复数发展中的重要一步；这不是唯一的历史起源，也不能把后来的工程用途说成最初发明目的。

延伸阅读：[MacTutor: Rafael Bombelli](#)。

1.1.2 从符号规则到几何对象

概念顺序。先定义 $i^2 = -1$ 与 $z = x + iy$ ，再介绍共轭、模、辐角和极坐标。重点放在“为什么这个乘法有意义”。

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

对计算机专业读者，把上式对照二维线性变换矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ：它恰好表示统一缩放与旋转。乘以 i 就是逆时针旋转 90° 。复数可存成两个实数，但它的价值来自乘法结构；任意二维向量运算并不自动具有这种结构。

解决了什么。连续多次平面旋转可直接相乘；多项式可在复数域分解成一次因子。后者是代数基本定理的内容，将在第 1.4 节回到复分析证明思路。

拟展开的小节。① 数系扩充与“中间量”；② 复平面与距离；③ 乘法的几何意义；④ 单位根如何把圆等分。

动手实验。用复数乘法连续旋转一个二维点，与矩阵乘法比较。绘制 $z^8 = 1$ 的八个根，观察相乘后仍落在这组点中。

本节应能回答：复数为什么既是代数工具，又是几何工具？仅仅把两个实数放在一起，与赋予它们复数乘法，有什么差别？

1.1.3 历史与教学的分工

正文只穿插必要的历史线索：16 世纪的代数求根、后来形成的复平面与复指数观念、19 世纪发展的积分与函数理论。主题顺序按理解依赖安排；“今天可以用它解决什么”与“历史上最初为了解决什么”分别说明，避免编造一条所有概念都为现代计算机而生的故事。

1.2 为什么振荡问题偏爱复指数？

1.2.1 把两个耦合的量合成一个对象

出发问题。实数域中，正弦与余弦求导会互相切换；移相、叠加和乘法也容易产生繁长公式。能否找一种表示，让这些操作更统一？

从单位圆上的匀速运动引入，再由幂级数或微分方程推导欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}.$$

求导成为乘以 $i\omega$ ，移相成为乘以 $e^{i\varphi}$ 。更一般地， $e^{(\sigma+i\omega)t}$ 把指数增长／衰减与振荡放进同一个表达式： σ 管包络， ω 管角频率。

1.2.2 从线性系统到傅里叶表示

关键论证。在线性时不变系统中，在相应卷积收敛的前提下，复指数输入经过系统后只改变倍数。这与矩阵特征向量“方向不变，只乘一个数”的思想相通。

拟展开顺序：① 复指数作为微分算子的特征函数；② 用复振幅记录幅值和相位；③ 叠加不同频率；④ 傅里叶级数与变换；⑤ 有限采样下的 DFT。

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k \frac{n}{N}}.$$

DFT 可以理解为把一个向量换到由离散复指数构成的正交基中。FFT 利用单位根的对称性和分治，把直接 DFT 的 $O(N^2)$ 运算量降为 $O(N \log N)$ 。这里先给出偶数／奇数下标拆分的图解，不展开全部实现。

解决了什么。音频频谱把混合信号拆成频率成分；卷积定理把某些卷积计算变成逐点乘法；交流电路用复阻抗把稳态微分关系变成代数关系。计算线性卷积时须补零，否则 DFT 域乘法对应循环卷积。

动手实验。生成两个正弦波的叠加，改变其中一个的相位；比较时域波形、DFT 幅值和相位。再比较直接卷积与补零后的 FFT 卷积。

1.2.3 到这里，为什么还不算学会了复变函数？

上面的许多收益来自复数代数、线性代数和傅里叶分析。即使不懂柯西积分公式，也可以实现 FFT。下一节才进入复分析的核心：研究函数对复变量可微时会受到哪些极强的约束。这些约束将解释积分、收敛和稳定性，而不只是缩短记号。

本节应能回答：为什么一个旋转的指数比一对三角函数好操作？复数表示带来的便利，和解析函数定理带来的能力，分别是什么？

1.3 复可微为什么比实可微强得多？

1.3.1 两个实变量的函数，额外要求在哪里？

出发问题。函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 看起来只是从二维平面到二维平面的映射。为什么换用复数就会产生新的定理？

关键不在输入形式，而在导数定义：

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

这里 h 可以沿任何方向趋近零，结果必须一致。分别沿实轴和虚轴计算，得到柯西-黎曼条件：

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

它们约束了雅可比矩阵的结构。在函数实可微的前提下，这组条件刻画复可微；只在某点检查偏导数满足等式，并不足以无条件推出复可微。

1.3.2 三个函数建立直觉

- $f(z) = z^2$ ：导数为 $2z$ ；在非零点附近，微小图形近似经历缩放与旋转。
- $f(z) = \bar{z}$ ：它关于实变量很光滑，但沿实方向和虚方向得到的复差商不同，所以处处不复可微。
- $f(z) = |z|^2$ ：只在零点复可微；说明“某一点存在导数”不等于“在邻域内解析”。

术语安排。在开集上处处复可微称为全纯；局部能展开成收敛幂级数称为解析。二者在复分析中等价，但这个等价是重要定理，应在第 1.4—1.5 节说明，不能当作显然事实。

1.3.3 强约束换来了什么？

全纯函数具有局部幂级数展开，因而任意阶可微；实部与虚部是调和函数；在导数非零处保持有向夹角。相比一般光滑实函数，这是一类自由度更少、却更容易受到整体控制的函数。

与计算机的类比可以是“满足额外不变量的数据结构允许更强操作”，但必须落回数学事实：**全纯性是一项结构约束，它使后续定理成为可能。**

动手实验。沿若干角度取 $h = \varepsilon e^{i\theta}$ ，比较三个函数的差商。绘制方格经 z^2 与共轭映射后的形状，并标出 z^2 在零点不是保角的例外。

本节应能回答：复导数定义里究竟多了什么？为什么不能把“关于两个实变量都很光滑”替换成“解析”？

1.4 从路径积分到边界重建

出发问题。实积分沿数轴进行；在平面中，从一点走到另一点可以选不同路径。什么时候换路径不影响结果？绕一个洞又会怎样？

拟展开顺序：参数化曲线并定义复积分 → 原函数与路径无关 → 柯西积分定理 → 柯西积分公式。先用 $f(z) = z$ 与 $f(z) = \frac{1}{z}$ 对照：后者绕原点逆时针一周的积分是 $2\pi i$ ，原点的洞不能忽略。

若 f 在单连通区域上全纯，则区域内闭曲线积分为零。更具体地，若 C 是正向简单闭曲线， f 在 C 及其内部的某个开邻域全纯，则内部点 a 满足：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

解决了什么。边界上的精确信息决定内部的值，并能给出导数估计。这导出最大模原理、刘维尔定理，进而给代数基本定理提供一条分析证明路线：若非常数多项式没有根，其倒数将成为有界整函数，从而产生矛盾。

重要区别。唯一确定不代表从含噪离散样本中能稳定重建；数学唯一性与数值条件性是两回事。

1.5 泰勒级数为什么会“看见”实轴外的障碍？

出发问题。实函数 $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 处处平滑，但几何级数给出

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

把变量扩展到复平面，就看到 $z = i$ 和 $z = -i$ 两个极点，它们离展开中心零点都只有 1。围绕一个中心的泰勒级数所能到达的最大解析圆盘，受复平面中的不可去奇点限制；沿实轴“看起来没问题”远远不够。

拟展开的小节。① 由柯西公式导出泰勒展开；② 收敛半径的几何意义；③ 泰勒余项与近似误差；④ 洛朗级数用负幂描述穿孔邻域；⑤ 可去奇点、极点、本性奇点。支点留到第 1.7 节。

解决了什么。解释实变量展开的有效范围，指导展开中心和分段近似的选择，并为第 1.8 节“奇点决定系数增长”建立桥梁。

动手实验。绘制上述级数的不同阶截断，比较 $x = 0.5$ 与 $x = 1.2$ ；再把函数换成 $\frac{1}{1+25x^2}$ ，预测收敛半径变为 $\frac{1}{5}$ 。

1.6 留数把整体积分压缩成局部数据

出发问题。有些实积分很难找到原函数。能否把实轴补成一条闭曲线，再用曲线内部少数特殊点完成计算？在孤立奇点 a 附近，洛朗展开中 $(z-a)^{-1}$ 的系数称为留数。其他整数次幂绕小圆积分均为零，因此这个系数恰好记录局部绕行贡献。若 f 在正向简单闭曲线内部除有限个孤立奇点外全纯，且在曲线上无奇点，则：

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, a_k).$$

贯穿算例。把 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 补成上半平面的半圆围道。只有极点 i 被包围，留数为 $\frac{1}{2i}$ ；证明大圆弧贡献趋零后，得到实积分为 π 。这个例子本身可用初等方法求解，但足够清楚地展示流程。

接着扩写到 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|b|}$ ，其中 $a > 0$ 、 b 为实数。它连接频域核与指数衰减。展开时必须解释半平面的选择和圆弧估计，不能只列留数就宣告完成。

动手实验。数值积分单位圆上的 $\frac{1}{z}$ 与 $\frac{1}{z^2}$ ；改变路径形状但不穿过奇点，观察积分不变。

1.7 对数为什么必须选支路？

出发问题。将 $z = re^{i\theta}$ 的角度连续增加 2π ，点回到原处；但公式 $\log z = \ln r + i\theta$ 却增加了 $2\pi i$ 。究竟是公式有错，还是函数需要额外说明？

拟展开顺序：多值辐角 → 对数与平方根的支路 → 交割线 → 沿路径的解析延拓 → 黎曼曲面的直观图景。说明负实轴作为主交割线是一种约定；零点作为支点则是内在障碍。黎曼曲面用多张相连的“平面页”记录绕行历史。

解决了什么。明确复对数、复幂的定义域，避免跨越交割线时误用实数恒等式；解释不同局部表达式如何接续成更大的函数。Gamma 函数与阶乘延拓可作为选读。

动手实验。让 $z = e^{i\theta}$ 绕圆一周，对比主值辐角与连续展开的相位；再比较平方根绕行一周与两周的结果。主值跳跃与信号的真实突变应区别对待。

1.8 离散计数为什么会需要复分析？

1.8.1 递推式先变成一个函数

出发问题。 动态规划能逐个算出答案，但它不一定直接告诉我们：答案增长多快？指数底数是什么？还有怎样的多项式修正？

先用斐波那契数 $F_0 = 0$ 、 $F_1 = 1$ 和 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 热身，引入普通生成函数：

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

最初可以把它当成形式幂级数，只做系数运算；转向复分析时，再讨论收敛域。分母的两个根为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 与 $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。模较小的极点产生主要的指数增长项，这与递推式的特征根方法相互对应。

1.8.2 主案例：括号串与二叉树中的 Catalan 数

设 C_n 表示含 n 对括号的合法括号串数，也可表示含 n 个内部结点的有序满二叉树数。分解第一对匹配括号内外的结构，得到：

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

递推转成 $C(z) = 1 + zC(z)^2$ 。选择在零点取值为 1 的分支：

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}, \quad C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}.$$

这里用 $\sim$ 表示比值趋于 1。正文扩写时依次解释：零点处分式有可去奇点； $\frac{1}{4}$ 处出现平方根支点；它的位置给出指数尺度 4^n ；局部平方根结构经奇点分析给出 $n^{-\frac{3}{2}}$ 修正及常数。

1.8.3 连接离散与连续的桥梁

在零点周围、解析域内取正向小圆 C ，由柯西公式提取系数：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A(z)}{z^{n+1}} dz.$$

这让“求第 n 个离散系数”变成围道积分问题，再通过奇点附近的行为估计积分。最近奇点约束指数尺度，但精确渐近式还需要局部类型、解析延拓域等条件；若有多个同模奇点，必须合并贡献，可能发生振荡或抵消。

解决了什么。 给计数、随机结构和算法分析提供精确增长规律。斐波那契数只是热身；对复杂递归结构，生成函数与奇点分析形成可复用的方法。

动手实验。 用递推计算 Catalan 数，画出 $C_n \sqrt{\pi \frac{n^{\frac{3}{2}}}{4^n}}$ ，检查它是否趋近 1。

延伸阅读：[Flajolet 与 Sedgewick: Analytic Combinatorics](#)，第 IV、VI 章。

1.9 极点为什么能诊断滤波与反馈？

1.9.1 从几行递推代码到复平面

出发问题。因果递归滤波器 $y_n = ay_{n-1} + x_n$ ，初始状态为零。为什么有的参数让过去逐渐消失，有的参数让误差持续放大？

单位脉冲响应为 $h_n = a^n$ ($n \geq 0$)。用双边 Z 变换表示这一因果序列：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

几何级数的收敛域把时间行为与复平面连接起来。当 $a \neq 0$ 时极点位于 $z = a$ ； $a = 0$ 时系统为恒等传递。若收敛域包含单位圆，就能令 $z = e^{i\omega}$ 读取频率响应。

严谨判据。离散线性时不变系统的 BIBO 稳定，即有界输入产生有界输出，等价于脉冲响应绝对可和。对因果、有理传递函数，约去公共因子后的所有极点严格位于单位圆内，等价于这种输入输出稳定性。不能忽略因果性和收敛域，也不能由约简传递函数直接断言内部所有状态稳定。

1.9.2 一张极点图可以读出什么？

- **离原点的距离：**对应离散模态的衰减或增长速度。
- **极点的辐角：**对应振荡频率；实系数系统的非实极点成共轭对出现。
- **靠近单位圆：**稳定侧的极点常产生更缓慢的衰减和更尖锐的频率选择性。
- **零点的位置：**在频率响应有定义时，单位圆上的零点可抑制对应频率。

延伸阅读：Julius O. Smith: [Introduction to Digital Filters, Pole-Zero Analysis](#)。

1.9.3 连续系统与反馈：作为进阶小节

拉普拉斯变量 $s = \sigma + i\omega$ 同时探测增长和振荡。对因果、适当的有理连续系统，BIBO 稳定要求传递函数极点严格位于左半平面。单个连续模态采样后满足 $z = e^{sT}$ ，所以左半平面映到单位圆内部；这不是说任意离散化算法都自动保留该映射。

再从辐角原理解释奈奎斯特判据的动机：在函数于围道上无零点、无极点等条件下，像曲线的绕数给出围道内部“零点数减极点数”。闭环特征方程为 $1 + L(s) = 0$ ，因此可通过 $L(s)$ 对 -1 的绕行、开环不稳定极点数及围道方向，判断闭环不稳定根数。它解决的是“不显式求出全部闭环根，怎样检查稳定性”。

动手实验。比较 $a = 0.5, 0.95, 1.05$ 的脉冲响应。取 $a = 1$ 并输入常数，说明“不衰减”并不等于 BIBO 稳定。

1.10 先把边界变简单，再解物理问题

出发问题。二维静电势、稳态温度场和理想势流常涉及拉普拉斯方程；难点可能不在方程本身，而在边界形状。从全纯函数的实部、虚部满足 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 出发，介绍调和函数、调和共轭与保角映射。若 $w = \varphi(z)$ 全纯且 $\varphi'(z) \neq 0$ ，则它在局部保持有向夹角。若 U 在目标域调和，则合适条件下 $U \circ \varphi$ 也调和，由此可以把已知解拉回原来的区域。

贯穿算例。楔形域 $0 < \arg z < \alpha$ ($0 < \alpha < 2\pi$) 用选定支路的 $w = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 映到上半平面。两条边分别保持温度 0 与 1 时，归一化温度 $u(z) = \frac{\arg z}{\alpha}$ 满足内部拉普拉斯方程与两侧边界值。若再加入有限距离的第三条边，必须重新满足那条边界，不能直接套用。

解决了什么。把几何复杂性转移到映射中。可进一步联系二维势流、静电场与曲面纹理参数化；保角保持局部角度，不保证面积和长度，也不是任意三维场问题的通用解法。黎曼映射定理可作理论选读。

动手实验。绘制楔形域网格经幂映射后的形状，再画出等温线；观察角点处映射导数的特殊行为。

1.11 绕开相减消去的数值求导

出发问题。前向差分 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 中， h 太大会带来截断误差，太小又会因两个接近的数相减而损失精度。若实函数在 x 附近存在全纯延拓，且在实轴上取实值，则：

$$f(x+ih) = f(x) + ihf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3),$$

$$\frac{\operatorname{Im}(f(x+ih))}{h} = f'(x) + O(h^2).$$

虚部直接承载一阶变化，避免了普通差分中的接近数相减。它适合某些科学计算程序的灵敏度计算与导数检查。

实现边界。被测程序须正确传播复数并实现相应解析延拓；取绝对值、共轭、丢弃虚部或按值切换分支，都可能破坏方法。它不能替代所有自动微分方案，也并非允许步长无限缩小而无浮点误差。

动手实验。对 $f(x) = e^x$ 、 $x = 1$ ，比较前向差分、中心差分、复步长与精确导数；扫描步长并画误差曲线。

延伸阅读：[Martins、Sturdza、Alonso: The Complex-Step Derivative Approximation, 2003。](#)

1.12 阅读建议与资料

1.12.1 每章采用相同的论证节奏

1. 给出一个具体障碍。尽量先用实数、递推、几何或代码把问题说清楚。
2. 展示原方法的局限。是表达繁琐、难以计算、解释不了收敛，还是缺少整体信息？
3. 只引入当前需要的概念。定义后立即回到原问题，说明它改变了哪一步。
4. 完成一个代表性推导。不把所有关键步骤都藏在“根据定理可知”后面。
5. 标明适用条件。给一个反例或边界情形，检验概念有没有真正被理解。
6. 给出可复现的小实验。先预测再运行；数值结果帮助建立直觉，但不替代证明。

1.12.2 建议学习路线

- 先建立直觉：第 1.1—1.3 节，再浏览第 1.9 节的递归滤波器例子。
- 补齐理论骨架：第 1.4—1.7 节，重点理解柯西公式、收敛半径与留数。
- 贴近计算机专业：深入第 1.8 节，并完成 Catalan 数与复步长两个实验。
- 按兴趣拓展：信号/控制方向读第 1.9 节，图形学/物理建模方向读第 1.10 节。

证明的取舍：完整推导欧拉公式、柯西-黎曼条件、柯西公式到泰勒展开的关系，以及一个留数算例；柯西积分定理给几何直觉和证明骨架；奇点分析的转移定理、黎曼映射定理和奈奎斯特判据先解释条件与用途，再另设进阶章节。

1.12.3 可选尾声：复数无处不在，复分析各有边界

量子力学的复振幅可以作为“相位会影响干涉”的远景，但它的入门主要需要复线性代数，不能据此声称必须先学留数。解析数论可作为更远的例子：通过复函数研究整数和素数；完整展开需要额外背景。两者宜作为尾声，而不挤占核心主线。

1.12.4 资料与后续阅读

以下资料用于历史核对、理论扩写和应用深入；章节例子按本文读者背景重新组织，并非按某本教材逐章翻译。

- [MacTutor: Rafael Bombelli](#)。核对三次方程与早期复数运算的历史线索。
- [MIT OCW: Complex Variables with Applications, Jeremy Orloff](#)。对应解析函数、柯西理论、级数、留数、调和函数、保角映射与辐角原理。
- [Flajolet 与 Sedgewick: Analytic Combinatorics](#)。重点读生成函数、亚纯渐近与奇点分析。
- [Julius O. Smith: Introduction to Digital Filters](#)。连接 Z 变换、收敛域、极点与因果系统稳定性。
- [Martins, Sturdza, Alonso: The Complex-Step Derivative Approximation](#)。ACM TOMS 29(3), 245–262, 2003。了解复步长法的实现条件与误差来源。

完成这条路线后，应当能够解释：为什么实轴上的问题会被复平面中的奇点控制，以及这种控制如何分别表现为级数的收敛边界、计数序列的增长规律和动态系统的稳定条件。

2 复数、复平面与分析预备

2.1 数域与几何：熟悉的运算，多出的结构

复数集记为 $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ ，其中 $i^2 = -1$ 。定义 $\operatorname{Re} z = x$ 、 $\operatorname{Im} z = y$ 、 $\bar{z} = x - iy$ 与 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。它们满足

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad |zw| = |z||w|, \quad |z+w| \leq |z| + |w|.$$

当 $z \neq 0$ ， $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ，所以除了零不能作除数，四则运算仍封闭。复平面的距离是 $|z - w|$ ；收敛与连续性首先使用这个距离，与二维欧氏空间完全一致。

写成 $z = re^{i\theta}$ 后，乘法使模相乘、辐角相加。这里 θ 只确定到 2π 的整数倍； $\arg z$ 可表示所有可能辐角， $\operatorname{Arg} z$ 通常表示某个约定区间内的主值。零没有辐角。复数没有与加法、乘法兼容的实数式全序，不能直接写 $z > 0$ 。

例题：求全部四次方根。 解 $z^4 = -16 = 16e^{i\pi}$ ，得到

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

仅取 $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ 会漏掉三个解。一般的 n 次根在圆周上等间隔排列。

2.2 为什么要学“区域”和“单连通”？

记开圆盘 $D(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$ 。集合是**开集**，指它的每个点都包含一个仍留在集合内的小圆盘；**区域**指非空、连通的开集。在复平面中，区域内任意两点可以用有限条线段连接起来。

紧集在复平面中等价于闭且有界；连续函数在紧集上取到最大值与最小值，也一致连续。这会让围道上的上界 $M = \max|f(z)|$ 有意义。一个闭圆盘是紧集，但不是区域。

区域单连通，指其中每条闭曲线都能在区域内连续收缩到一点。圆盘单连通，圆环与 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 不单连通。“没有洞”是直观图像，定义中的连续变形才是精确内容。函数 $\frac{1}{z}$ 在穿孔平面处处全纯，却不能在穿孔平面找到原函数；孔洞将直接影响积分。

先区分两种条件：全纯性是函数在局部的性质，单连通性是定义域的整体性质。复积分中的许多结论同时依赖二者。

2.3 极限与连续：方向多了，定义没有变

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$ 的意思是：对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使 $0 < |z - a| < \delta$ 时有 $|f(z) - L| < \varepsilon$ 。只沿实轴和虚轴算出同一个极限，并不能保证总极限存在，因为还可能沿其他直线或曲线接近。

2.4 函数列：为什么逐点收敛还不够？

逐点收敛允许达到某个误差所需的下标随点变化；在集合 E 上一致收敛要求同一个下标对所有点都有效：

$$\sup_{z \in E} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0.$$

例子 $f_n(x) = x^n$ 在实区间 $[0, 1]$ 上逐点趋于“ $x < 1$ 时为零、 $x = 1$ 时为一”的函数。连续函数的逐点极限可以不连续。若只看 $[0, r]$ 、 $r < 1$ ，则 $\sup x^n = r^n \rightarrow 0$ ，收敛是一致的。

对区域 Ω ，**局部一致收敛**指在每个紧子集上一致收敛。复分析中常用这种模式：幂级数在收敛圆盘内部，每个更小的闭圆盘上都一致收敛，但不必在整个收敛圆盘上统一控制。

魏尔斯特拉斯判别法。若在 E 上有 $|g_n(z)| \leq M_n$ ，且实数级数 $\sum M_n$ 收敛，则 $\sum g_n(z)$ 在 E 上绝对且一致收敛。

证明。任取 $q > p$ ，有 $|\sum_{n=p}^q g_n(z)| \leq \sum_{n=p}^q M_n$ ；右边的尾和能一致地趋零，由完备性得到结论。这个估计将允许我们交换某些级数与曲线积分。逐项求导需要更强条件，不能仅凭一致收敛直接进行。

2.5 扩充复平面：把无穷远放进图景

扩充复平面为 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。它可由球面的立体投影理解：无穷远不是某个很大的复数，而是所有 $|z| \rightarrow \infty$ 的共同极限点。研究无穷远附近的行为时，换坐标 $w = \frac{1}{z}$ ，问题转成 $w = 0$ 附近的问题。

例如 z^m 在无穷远有 m 阶极点，因为它在新坐标中变成 w^{-m} ； $\frac{1}{z}$ 在无穷远趋零。这个观点在分式线性变换和有理函数中尤其自然。

2.6 习题与自检

1. **2-A, 计算。**求 $\frac{1}{1+i}$ 和 $z^3 = 8$ 的所有解，并在复平面标出后者。
2. **2-B, 概念。**判断 $|z| < 2$ 、 $0 < |z| < 2$ 、 $\operatorname{Re} z > 0$ 是否为区域、是否单连通。说明理由。
3. **2-C, 证明。**证明反三角不等式 $\|z\| - \|w\| \leq \|z - w\|$ ，由此证明模函数连续。
4. **2-D, 收敛。**证明 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z| \leq r < 1$ 一致收敛，并说明它为何不在整个 $|z| < 1$ 上一致收敛。

与后文的连接。闭曲线需要区域容纳；最大模原理需要连通性；支路需要考虑孔洞；幂级数与积分交换需要局部一致收敛。这些词不是背景装饰，而是定理能否使用的开关。

3 复可微、全纯函数与初等函数

3.1 定义：一个复数描述所有方向的一阶变化

若 f 在 a 的邻域有定义，且极限 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在，就说 f 在 a 复可微。等价地，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(|h|).$$

这意味着局部的一阶变化只能是乘以同一个复数。若在开集上处处复可微，就称全纯；在整个 $\mathbb{C}$ 上全纯称为整函数。复可微必连续，证明由上式直接得到。

和、积、商（分母非零）与链式法则的形式同实微积分。于是多项式是整函数，有理函数在分母不为零处全纯。例如 $f(z) = z^3$ 的差商为 $3z^2 + 3zh + h^2$ ，故 $f'(z) = 3z^2$ 。

3.2 柯西-黎曼条件：必要条件与充分条件

令 $f = u + iv$ 。沿实增量求差商得 $u_x + iv_x$ ；沿纯虚增量求得 $v_y - iu_y$ 。复导数存在时二者一致，所以

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

准确的充分性。 如果二维映射 (u, v) 在该点实可微，并满足上述条件，那么 f 在该点复可微。在邻域中偏导数存在且连续，是保证实可微的一种常用充分条件。

证明。 实可微给出 $\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(|h|)$ 及类似的 Δv ；代入柯西-黎曼条件后，合并成 $\Delta f = (u_x + iv_x)h + o(|h|)$ 。因此 $f' = u_x + iv_x$ 。

例题：实光滑不等于复可微。 对 $f(z) = \bar{z}$ ，实方向差商为 1，纯虚方向为 -1 ，所以任何点都不复可微。对 $f(z) = |z|^2$ ，柯西-黎曼条件只允许 $z = 0$ ；该点差商是 $\bar{h} \rightarrow 0$ ，所以它只在零点复可微。

二维雅可比矩阵因此具有 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 的形式，其中 $a + ib = f'(z)$ ；其行列式为 $|f'(z)|^2$ 。当导数非零时，它局部可逆，并把一阶小图形统一旋转和缩放；导数为零时则可能出现折叠或分叉。

3.3 指数、三角函数：由幂级数定义

定义 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ，此级数处处收敛，在紧集上一致收敛；其求导性质将在第六章的幂级数理论中得到严格保证。由级数乘法可得 $e^{z+w} = e^z e^w$ ，从而 $e^z \neq 0$ ，且

$$e^{x+iy} = e^{x(\cos y + i \sin y)}.$$

复指数以 $2\pi i$ 为周期，所以它不是全平面上的——映射。解 $e^z = 1$ 得 $z = 2k\pi i$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ；这一周期性正是复对数不能全局单值的根源。

定义 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ 、 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 。它们是整函数，但在复平面上不有界，例如 $\cos(iy) = \cosh y$ 随 $|y|$ 增大而增长。因此“实轴上的性质”不能不加检查地扩展到复平面。

3.4 对数与复幂：定义域是函数的一部分

在割平面 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上选 $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ ，定义主支

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

它在 Ω 上全纯，导数为 $\frac{1}{z}$ 。可由极坐标的偏导数验证柯西-黎曼条件，或在指数的局部反函数中得到。对数的其他支路相差 $2k\pi i$ ；在整个穿孔平面上不存在连续的单值对数。

给定支路后才能定义 $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}$ 。实数中熟悉的 $\log(zw) = \log z + \log w$ 对主值未必成立：取 $z = w = e^{3\pi i/4}$ ，左边主值为 $-\pi i/2$ ，右边为 $3\pi i/2$ ，相差 $2\pi i$ 。

3.5 本章例题：从柯西-黎曼条件找函数

已知 $u(x, y) = x^2 - y^2$ ，寻找全纯函数 $u + iv$ 。由 $v_y = u_x = 2x$ 得 $v = 2xy + g(x)$ ；由 $v_x = -u_y = 2y$ 得 $g'(x) = 0$ 。所以 $f(z) = z^2 + ic$ ，其中 c 为实常数。这是寻找调和共轭的最简单例子。

3.6 习题与自检

1. **3-A.** 判断 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 在何处复可微；用差商而非仅写结论。
2. **3-B.** 求 $e^z = -2$ 的全部解，说明实部为什么固定。
3. **3-C.** 求实部为 $e^x \cos y$ 的所有整函数。
4. **3-D.** 说明 z^2 在每个非零点附近可逆，却不在整个穿孔平面上——对应。

4 复积分与柯西积分定理

4.1 先把曲线写成参数

对分段连续可微的曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, 定义

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

右边按实部与虚部分别做普通定积分。注意乘的是复数 $\gamma'(t)$ ；弧长积分则乘 $|\gamma'(t)|$ ，二者不是同一个对象。反向走曲线会使复积分变号，连续拼接曲线会使积分相加。

令 C_R 是绕原点逆时针走一周的半径 R 圆，参数化 $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 。代入后可算得，对整数 m ,

$$\int_{C_R} z^m dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases}.$$

若 $m \neq -1$, 原点仍是奇点，但该圆上的积分为零；因此不能反过来从“一次积分为零”断言内部没有奇点。

4.2 最常用的估计：ML 不等式

若曲线上 $|f| \leq M$, 曲线长度为 L , 则

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq ML.$$

这个看似朴素的不等式支撑了许多围道论证。比如在半径 $R > 1$ 的上半圆上, $|\frac{1}{z^2+1}| \leq \frac{1}{R^2-1}$, 因此圆弧积分的模至多为 $\pi \frac{R}{R^2-1}$, 当 R 趋于无穷时消失。

4.3 原函数与路径无关

若区域上存在全纯函数 F , 满足 $F' = f$, 就称 F 为 f 的原函数。链式法则给出

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

因此闭曲线积分为零，积分只与端点有关。反过来，对连续函数 f , 若区域内所有闭曲线积分都为零，可固定基点，沿任意路径定义 $F(z) = \int_a^z f(w) dw$ ；小线段上的差商证明 $F' = f$ 。

反例：不能漏掉定义域。 $\frac{1}{z}$ 在穿孔平面全纯，但绕单位圆积分为 $2\pi i$, 所以没有全局原函数。它在割平面却有原函数 $\text{Log } z$ 。

4.4 柯西-古萨定理：从局部可微到闭路积分为零

定理。若 f 在单连通区域 Ω 上全纯，则对区域内任意分段光滑闭曲线 γ ， $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ 。等价地， f 在该区域存在原函数。

证明思路。先证一个三角形及其内部附近全纯时，沿三角形边界积分为零。把三角形分成四个相似小三角形，内部边抵消，选择积分模最大的一个继续细分。第 n 个三角形直径与周长均缩小为原来的 2^{-n} ，而积分至少保留原积分模的 4^{-n} 。

嵌套三角形收缩到一点 a 。复可微性给 $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + r(z)$ ，其中 $|r(z)| \leq \varepsilon|z-a|$ ，只要 z 足够近。常数项与一次项积分为零，余项的 ML 估计不超过常数乘 $\varepsilon 4^{-n}$ 。和前面的下界比较，原三角形积分至多为常数乘 ε ；令 ε 趋零即得结论。

最后用三角剖分、路径的局部替换与单连通性推广到一般闭曲线。这里省略这一步的拓扑细节。古萨证明的重要性在于：只假设复可微，不额外假设导数连续；导数连续将是后续结论。

4.5 围道变形：允许移动，但不能穿过障碍

若两条同向闭曲线之间的区域上 f 全纯，它们的积分相同。在带孔区域的边界上，外边界逆时针、内边界顺时针，合起来才是正向边界。因而外圈积分等于各内圈逆时针积分之和。这是柯西公式和留数定理的共同几何基础。对 $\frac{1}{z-a}$ ，只要闭曲线不穿过 a ，可以研究它绕 a 的净圈数：

$$\text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz.$$

这称为绕数。简单闭曲线逆时针包围点时为 1，外部为 0；自交曲线可能有其他整数绕数。第八章会把它用于统计零点。

4.6 习题与自检

1. **4-A。**分别计算沿单位圆逆时针一周的 $\int \bar{z} dz$ 和 $\int z^2 dz$ 。为什么结果不同？
2. **4-B。**求 $\int_{\gamma} 2z dz$ ，其中 γ 是从 0 到 $1+i$ 的任意分段光滑曲线。
3. **4-C。**有同学说“全纯函数闭路积分总是零”。用 $\frac{1}{z}$ 指出少了什么；再给出一个正确版本。
4. **4-D。**在大半圆上估计 $\frac{1}{z}$ 的积分。解释为什么仅有函数值趋零，不足以保证圆弧积分趋零。

5 柯西积分公式与解析函数的刚性

5.1 从闭路积分为零，到求出函数值

设 C 为正向简单闭曲线， f 在 C 及其内部的一个开邻域全纯， a 在曲线内部。则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

这是柯西积分公式。分母人为制造了一个位于 a 的障碍；围道积分恰好取回该点的函数值。

证明。 在 a 附近挖去半径 r 的小圆盘。被积函数在剩余区域全纯，由围道变形，原积分等于逆时针小圆上的积分。小圆上写成

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) + \int_{|z-a|=r} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz.$$

末项的模不超过 $2\pi \max_{|z-a|=r} |f(z) - f(a)|$ ，由连续性随 r 趋零。因此原积分等于 $2\pi i f(a)$ 。这里用到了前章围道变形的结论。

5.2 高阶导数：一次可微为何推出无穷次可微

当 a 在曲线内部移动时，它与边界保持正距离的小邻域内，可以对核函数逐次求导并交换求导与积分，得到

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

因此全纯函数具有所有阶复导数，且这些导数连续。对圆 $|z-a|=R$ ，若 $|f| \leq M$ ，ML 不等式进一步给出柯西估计：

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

这把边界的大小转化成中心导数的上界，是后续刚性结论的量化来源。

例题。 求逆时针圆 $|z|=2$ 上的 $\int \frac{e^z}{z^3} dz$ 。取 $f = e^z$ 、 $n=2$ 、 $a=0$ ，积分为 $\frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i$ 。这里曲线上没有奇点，且 e^z 在整张平面全纯。

5.3 刘维尔定理与代数基本定理

刘维尔定理。 有界整函数必为常数。

证明。 若 $|f(z)| \leq M$ 对所有 z 成立，对任意 a 与任意 $R > 0$ 使用柯西估计，有 $|f'(a)| \leq \frac{M}{R}$ 。令 R 趋于无穷，得 $f'(a) = 0$ 。沿线段积分，函数处处同值。

代数基本定理的证明。设非常数多项式 p 没有复根，则 $\frac{1}{p}$ 是整函数。由最高次项占优， $|p(z)| \rightarrow \infty$ 当 $|z| \rightarrow \infty$ ，故圆盘外 $\frac{1}{p}$ 有界；圆盘内因连续且无零点， $|p|$ 取到正最小值，所以倒数也有界。刘维尔定理使 $\frac{1}{p}$ 为常数，矛盾。因此每个非常数复多项式有根，再反复除以一次因子得到完全分解。

5.4 最大模原理：峰值不能孤立地藏内部

最大模原理。区域上的非常数全纯函数，其模不能在区域内部取得局部最大值。若函数还连续到有界区域的闭包，则模的全局最大值出现在边界。

证明思路。取以极大点 a 为中心的小圆，柯西公式变成平均值公式 $f(a) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$ 。如果圆周上的模都不超过 $|f(a)|$ ，平均的模仍达到这个上界，则三角不等式必须处处取等，圆周上各值的相位和大小都相同。对所有足够小半径成立，函数在邻域常值；再用第六章的恒等定理推广到整个区域。

这个证明明确借用了下一章的结论；它不参与下一章泰勒展开和恒等定理的证明，所以没有循环。若最大值为零，则函数在邻域直接为零。

例题：有界区域上的唯一性。若两个函数在有界区域全纯，连续到闭包，并且边界值相同，对差函数使用最大模原理，内部模也只能为零。因此整个区域内相同。

5.5 莫雷拉定理与局部一致极限

莫雷拉定理（证明思路）。连续函数若在区域内任意三角形边界上的积分均为零，则全纯。在一个小圆盘内沿线段积分构造原函数，三角形条件保证路径可替换，差商给出原函数的导数等于原函数下的被积函数；再用全纯函数可任意次求导，即得被积函数全纯。

因此，**全纯函数列的局部一致极限仍全纯**：局部一致收敛保证极限连续，并允许交换极限与三角形边界积分，随后应用莫雷拉定理。相反，仅有逐点收敛通常不够。

5.6 习题与自检

1. **5-A.** 求 $\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2} dz$ ，取逆时针方向。
2. **5-B.** 证明：若整函数满足 $|f(z)| \leq C(1 + |z|)$ ，则它是次数至多为 1 的多项式。
3. **5-C.** 若 f 在单位圆盘全纯，连续到闭圆盘，且边界上 $|f| \leq 2$ ，内部能否有 $|f| = 3$ ？能否有 $|f| = 2$ ？

6 幂级数、洛朗展开与孤立奇点

6.1 幂级数及收敛半径

对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, 存在收敛半径 $R \in [0, \infty]$, 使它在 $|z-a| < R$ 绝对收敛, 在 $|z-a| > R$ 发散。边界上必须逐点讨论。柯西-阿达马公式为

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

约定右边为零时 $R = \infty$, 无穷时 $R = 0$ 。这是把根值判别法用于固定的 z 得到的。在任何更小闭圆盘上, 用一个介于其半径和 R 之间的半径作几何级数控制, 可得一致收敛。导数级数具有相同收敛半径, 因此可在内部逐项求导。

6.2 泰勒定理：全纯与解析的等价

定理。 若 f 在 $|z-a| < R$ 全纯, 则该圆盘内

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.$$

反过来, 收敛幂级数在其收敛圆盘内定义全纯函数。因此全纯与局部解析等价。

证明思路。 对固定 $|z-a| < r < R$, 在柯西公式中展开

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}, \quad |w-a| = r.$$

右边在积分圆周上一致收敛, 所以可逐项积分。系数由高阶柯西公式确定。若圆周上 $|f| \leq M_r$, 截断到 N 次的误差不超过

$$\frac{M_r \left(|z-a|^{\frac{1}{r}} \right)^{N+1}}{1 - |z-a|^{\frac{1}{r}}}.$$

这是可实际使用的误差估计, 不只是“存在一个展开”。

6.3 零点的阶数与恒等定理

若 f 在 a 附近全纯, $f(a) = 0$, 且不是在该邻域恒为零, 则泰勒系数中存在首个非零项 a_m , 从而 $f(z) = (z-a)^m g(z)$, 其中 $g(a) \neq 0$ 。称 a 是 m 重零点; 由 g 的连续性, 足够小邻域内没有其他零点。

恒等定理。 若区域内两个全纯函数在一组具有区域内聚点的点上相等, 则它们处处相等。

证明思路。 对差函数应用上面的零点孤立性, 聚点迫使其在某个邻域恒为零。再用开闭集论证与区域连通性, 把零的邻域传播到整个区域。聚点必须在区域内; 只在边界聚集不够。

6.4 洛朗展开：不同圆环，可能是不同级数

若 f 在圆环 $r < |z - a| < R$ 全纯，则可唯一写成

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

其中 $r < \rho < R$ ，积分取正向。正幂与负幂部分分别在较小的闭子圆环上一致收敛。证明由内外两条边界的柯西公式和两种几何展开得到。

例题。 对同一个 $\frac{1}{z(z-1)}$ ，围绕零点：

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}, \quad 0 < |z| < 1;$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2}, \quad |z| > 1.$$

内圈的 z^{-1} 系数为 -1 ，外圈则为零。洛朗展开必须连同圆环一起给出；“某点的局部留数”要使用足够小的穿孔邻域，而不是任意大圆环中的系数。

6.5 三类孤立奇点与它们的识别方式

若 f 在 $0 < |z - a| < r$ 全纯，则称 a 为孤立奇点。

- **可去奇点：** 负幂系数全为零，可补一个值使其全纯。等价判据是某个穿孔邻域内有界。例如 $\frac{\sin z}{z}$ 在零点补值 1。
- **m 阶极点：** 只有有限个负幂，最低次为 $-m$ 。等价于 $(z-a)^m f(z)$ 可全纯延拓且在 a 非零；也等价于 $|f(z)| \rightarrow \infty$ 。
- **本性奇点：** 负幂项有无穷多个。例如 $e^{\frac{1}{z}}$ 在零点。卡索拉蒂-魏尔斯特拉斯定理（不证）说：任意穿孔邻域的像在复平面稠密。

可去奇点判据的证明思路。 若 f 有界，令 $g(z) = (z-a)^2 f(z)$ 并设 $g(a) = 0$ 。差商显示 $g'(a) = 0$ ，故 g 在整个邻域全纯且泰勒展开从至少二次项开始；除回 $(z-a)^2$ 就得到 f 的全纯延拓。

对数的零点支点不属于上述三类：不存在一个完整的穿孔圆盘，使所选对数在那里单值全纯。不能把所有“出问题的点”都当成孤立奇点。

6.6 习题与自检

1. **6-A.** 求 $\frac{1}{2-z}$ 在零点的泰勒展开及收敛半径。
2. **6-B.** 分类 $\frac{\sin z}{z}$ 、 $\frac{1}{1-\cos z}$ 、 $e^{\frac{1}{z}}$ 在零点的奇点。
3. **6-C.** 若整函数 f 满足 $f(\frac{1}{n}) = 0$ 对所有正整数成立，证明 f 恒为零。若只知道 $f(n) = 0$ 呢？

7 留数定理与实积分

7.1 留数为什么只取一个系数？

在孤立奇点 a 附近, $f(z) = \sum c_n(z-a)^n$ 中的 c_{-1} 称为留数, 记为 $\text{Res}(f, a)$ 。沿足够小的正向圆逐项积分, 只有 $n = -1$ 留下 $2\pi i$, 所以

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz.$$

它可能是复数, 也可能为零。零留数不表示奇点可去, 例如 $\frac{1}{z^2}$ 在零点有二阶极点而留数为零。

留数定理。若 C 是正向简单闭曲线, f 在 C 及内部附近除有限个孤立奇点 a_k 外全纯, 且曲线上没有奇点, 则

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, a_k).$$

一般闭曲线的版本要给每个留数乘上相应绕数, 并满足围道与定义域的条件。

证明。在每个奇点挖去互不相交的小圆盘。余下区域使用柯西定理, 外边界的积分等于各小圆逆时针积分之和; 每个小圆积分由洛朗系数公式求出。

7.2 三种常用计算法

1. **简单极点:** $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$ 。
2. **商函数:** 若 $f = \frac{g}{h}$, g, h 在 a 附近全纯, $h(a) = 0$ 、 $h'(a) \neq 0$, 则留数为 $\frac{g'(a)}{h'(a)}$ 。若 $g(a) = 0$, 奇点可能被约去, 公式仍给零。
3. **m 阶极点:** 将全纯函数 $(z-a)^m f(z)$ 求 $m-1$ 阶导数, 在 a 处除以 $(m-1)!$ 。或者直接展开, 读取一次负幂的系数。

例题。 $\frac{e^z}{z^3} = z^{-3} + z^{-2} + (\frac{1}{2})z^{-1} + \dots$, 故零点留数为 $\frac{1}{2}$ 。对 $\frac{1}{1+z^2}$, 在 i 的留数为 $\frac{1}{2i}$, 在 $-i$ 的留数为 $-\frac{1}{2i}$ 。

7.3 第一个完整实积分

取上半圆围道, 半径 $R > 1$ 。只有 i 在内部, 所以围道积分为 π 。由第四章的 ML 估计, 大圆弧积分趋零; 实轴上的被积函数绝对可积, 故

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

这一步不是只求留数: 还必须验证无边界奇点、实积分存在, 以及补上的圆弧没有残余贡献。

7.4 振荡积分：为什么要选择半平面？

设 $a > 0, b > 0$ 。考虑 $f(z) = \frac{e^{ibz}}{z^2 + a^2}$ 。若 $z = x + iy$ ，则 $|e^{ibz}| = e^{-by}$ ，所以上半平面控制增长。大半圆上它至多为 1，圆弧积分可由 $\pi \frac{R}{R^2 - a^2}$ 控制。

唯一内部极点为 ia ，留数是 $\frac{e^{-ab}}{2ia}$ ，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-ab}.$$

取实部即可得到余弦积分。 $b < 0$ 改用下半平面并注意顺时针方向； $b = 0$ 退回非振荡例子。合起来，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|b|}.$$

这个案例的分母已提供足够的衰减，不必额外调用约旦引理。对衰减更慢的有理函数，才需要更精细的指数圆弧估计。

7.5 三角积分：把单位圆当作积分路径

对 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4 \cos t} dt$ ，令 $z = e^{it}$ ，则 $dt = d\frac{z}{iz}$ ， $\cos t = \frac{z+z^{-1}}{2}$ ，得到

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{i(5z - 2z^2 - 2)} dz.$$

分母的根为 $\frac{1}{2}$ 和 2；单位圆内只有 $\frac{1}{2}$ 。该点留数为 $\frac{1}{3i}$ ，所以原积分为 $2\frac{\pi}{3}$ 。替换变量后必须重新检查圆内的极点，而不能把分母所有根都算进去。

7.6 实轴上有极点时：主值并非普通积分

若被积函数在积分区间内有奇点，普通反常积分要求左右两部分各自收敛；柯西主值允许特定的对称抵消。例如 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ 的普通反常积分不存在，但对称主值为零。围道遇到实轴极点时要用小圆弧绕开，并明确是在计算哪一种积分。本讲义不把主值技巧作为必修计算套路。

7.7 习题与自检

1. **7-A**。求 $\frac{e^z}{z^2}$ 在零点的留数。
2. **7-B**。用上半圆围道计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$ ，写出圆弧估计。
3. **7-C**。求 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos t} dt$ ；提示：两个极点为 $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 。
4. **7-D**。解释为什么 $\frac{1}{z^2}$ 的留数为零，却仍不能在零点补值变成全纯函数。

8 辐角原理、儒歇定理与零点计数

8.1 不求根，也能数出根有多少

对高次多项式，显式求根通常既困难又没有必要。如果只关心某个区域内有多少个根，可以让边界上的函数值替我们完成计数。

设 f 在 a 有 m 重零点，写为 $f(z) = (z-a)^m g(z)$ 、 $g(a) \neq 0$ 。则

$$f' \frac{z}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + g' \frac{z}{g(z)}.$$

后一项在附近全纯，因此对数导数 $\frac{f'}{f}$ 在该点留数为 m 。若 a 是 m 阶极点，同样的计算给出留数 $-m$ 。

辐角原理。 设 f 在正向简单闭曲线 C 及内部附近亚纯，且曲线上没有零点或极点，则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f' \frac{z}{f(z)} dz = N - P.$$

N 为内部零点总数、 P 为内部极点总数，都按重数计。亚纯指除孤立极点外全纯。

证明。 对 $\frac{f'}{f}$ 使用留数定理，并代入上面的局部计算。几何上，左边是像曲线 $f(C)$ 绕原点的绕数，也就是连续跟踪辐角一圈后的净变化除以 2π 。这里必须跟踪连续辐角，不能只把起点与终点的主值相减。

8.2 儒歇定理：小扰动不能让根穿过边界

儒歇定理。 若 f, g 在 C 及内部附近全纯，且对所有 $z \in C$ 有 $|g(z)| < |f(z)|$ ，则 f 和 $f+g$ 在 C 内的零点总数相同，均按重数计。

证明。 考虑 $f_t = f + tg$ ， $0 \leq t \leq 1$ 。边界上 $|f_t| \geq |f| - t|g| > 0$ ，所以没有零点穿过边界。辐角原理中的积分随 t 连续变化，但始终取整数值，因而为常数。取 $t = 0, 1$ 得结论。

例题：对同一多项式使用两次。 令 $p(z) = z^5 + 3z + 1$ 。在 $|z| = 1$ 上， $|z^5 + 1| \leq 2 < 3 = |3z|$ ，故单位圆内恰有 1 个零点。在 $|z| = 2$ 上， $|3z + 1| \leq 7 < 32 = |z^5|$ ，故半径 2 的圆内恰有 5 个零点。所以圆环 $1 < |z| < 2$ 中恰有 4 个零点，且这两条边界都没有根。

8.3 解析延拓：公式的边界，不总是函数的边界

几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 只在单位圆盘内收敛，但它在那里等于 $\frac{1}{1-z}$ 。后者在 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 全纯，因此把该函数延伸到了原级数不能计算的区域。这里延拓的是函数，不能据此声称原级数在 $z=2$ 收敛。

若两个全纯函数在定义域的交集上相等，就可以在并集上拼接。恒等定理保证：在一个给定连通域上，若全纯延拓存在，则由原来的开集唯一确定。然而，沿不同路径接续局部函数，仍可能带来多值现象，例如绕原点延拓对数后增加 $2\pi i$ 。

单值化定理（不证）。 在单连通区域内，如果一个全纯函数芽能沿区域内每条路径解析延拓，则延拓结果与路径无关。这里“能沿每条路径延拓”是实际条件，单连通性不能自动消除函数本身的奇点。

8.4 数值绕数为什么可能数错？

取边界采样点 z_k ，计算 $w_k = f(z_k)$ 。若相邻点的真实辐角增量都足够小，可将相邻主辐角差调整到 $(-\pi, \pi]$ 再求和。采样太稀疏时，一段曲线可能已绕原点一圈，端点却几乎相同，算法就会漏数。

还要检查 $|w_k|$ 是否接近零，并加密采样观察稳定性；这些检查提高可信度，但仅在采样点检查并不能严格证明整条边界无零点。本章多项式有儒歇不等式提供独立的严格保证，数值绕数只作验证。

8.5 后续理论的边界

本章解决的是某一区域中的计数，未必给出每个根的位置。若要得到位置，还需结合区间/区域细分、牛顿法或其他数值求根方法。无穷乘积、Mittag-Leffler 展开、正常族和 Picard 定理是自然的进阶主题，本讲义只在第一章的应用视角中指出方向。

8.6 习题与自检

1. **8-A。** 证明 $z^4 + 4z + 1$ 在单位圆内恰有 1 个根。
2. **8-B。** 对 $f(z) = \frac{(z-1)^2}{z+1}$ ，沿 $|z|=2$ 的正向圆，求 $\int \frac{f'}{f} dz$ 。
3. **8-C。** 若 $f(C)$ 的主值辐角在起点和终点相同，能否断言绕数为零？用单位圆给出反例。
4. **8-D。** 解释 $\frac{1}{1-z}$ 的延拓为什么没有使 $\sum z^n$ 在 $z=2$ 变成收敛级数。

与第一章反馈系统的连接： 闭环方程 $1 + L(s) = 0$ 的根数，可转成 $1 + L(s)$ 对零点的绕数，再等价地观察 $L(s)$ 对 -1 的绕行。具体的奈奎斯特围道方向与虚轴极点处理属于控制课程，不能只背“绕几圈”而省略条件。

9 保角映射与复平面的几何

9.1 局部保角与全局一一映射

若 f 在 a 附近全纯且 $f'(a) \neq 0$, 则 $f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(|h|)$ 。两条经过 a 的光滑曲线, 其非零切向量都乘以同一个复数 $f'(a)$, 因此夹角和方向保持; 长度在一阶近似下乘以 $|f'(a)|$, 面积乘以 $|f'(a)|^2$ 。

复反函数定理 (不证) 保证这种函数在足够小邻域内有全纯逆函数。但局部一一对应不等于整体单射: e^z 处处导数非零, 却有周期; z^2 在非零点局部保角, 却把 z 与 $-z$ 映到同一点。需要全局换域时, 要另外检查单射和满射到目标域。

9.2 分式线性变换: 最可控的一类换域

设 $ad - bc \neq 0$, 则

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

称为 Möbius 变换或分式线性变换。在扩充复平面上, 它是一一对应; 若 $c \neq 0$, 把 $-\frac{d}{c}$ 映到无穷远, 把无穷远映到 $\frac{a}{c}$ 。它由平移、非零伸缩旋转与倒数变换组合而成。

这类变换把广义圆映为广义圆; 广义圆包括普通圆和直线。可把圆或直线统一写成 $A|z|^2 + Bz + \overline{B}z + D = 0$, 其中 A, D 为实数, 代入逆变换即可验证。给定三个不同点及三个不同像点, 可唯一确定一个 Möbius 变换。

例题: 上半平面到单位圆盘。 取 $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ 。若 $z = x + iy$ 且 $y > 0$, 则

$$|T(z)|^2 = \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2} < 1.$$

实轴映到单位圆, i 映到 0。解出逆变换 $z = \frac{i(1+w)}{1-w}$, 可验证每个 $|w| < 1$ 都回到上半平面, 故得到双全纯对应。

9.3 幂映射与楔形域

在 $0 < \arg z < \alpha$ 上选取连续辐角, $z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 将其映到上半平面; 指数把辐角放大为原来的 $\frac{\pi}{\alpha}$ 倍。这个分支在楔形域内单射, 因为角度范围恰好被送到 $(0, \pi)$ 。原点通常在边界, 不能直接把内部非零导数的论证套到角点上。

9.4 Schwarz 引理：固定原点的圆盘映射不能向外扩张

Schwarz 引理。若 f 在单位圆盘全纯， $|f(z)| < 1$ ，且 $f(0) = 0$ ，则 $|f(z)| \leq |z|$ 、 $|f'(0)| \leq 1$ 。若某个非零点取等，或 $|f'(0)| = 1$ ，则 $f(z) = e^{i\theta}z$ 。

证明。定义 $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ ，在零点补值 $f'(0)$ ，得到全纯函数。在 $|z| = r < 1$ 上， $|g| \leq \frac{1}{r}$ ；最大模原理使同样上界在该圆内成立。固定内部点，让 r 增至 1，得 $|g| \leq 1$ 。若内部某点取到模 1，最大模原理迫使 g 为模 1 的常数，于是得到等号情形。

这不是所有全纯函数都压缩长度，而是“圆盘映到圆盘且固定零点”带来的约束。它是复分析中归一化条件产生刚性的典型例子。

9.5 圆盘自同构与黎曼映射定理

对 $|a| < 1$ ， $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ 把单位圆盘映到自身，并把 a 送到零点。恒等式

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}$$

显示它保持圆盘内部；直接解方程得到逆变换。由 Schwarz 引理可证明，单位圆盘的所有双全纯自同构都形如 $e^{i\theta}\varphi_a(z)$ 。

黎曼映射定理（不证）。每个非空、单连通、且不等于整个复平面的区域，都与单位圆盘双全纯等价。固定一个点的像，并要求该点导数为正实数后，映射唯一。

它是存在性定理，通常不直接给出显式公式；边界能否连续延拓、数值上如何求解，需要额外理论。整个复平面不能映成单位圆盘，因为那会给出一个有界而非常数的整函数，违反刘维尔定理。

9.6 习题与自检

1. **9-A。**求 $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ 的导数，验证上半平面内处处非零。
2. **9-B。**将第一象限映到单位圆盘。提示：先平方，再使用本章的 T 。
3. **9-C。**若圆盘到圆盘的全纯函数满足 $f(0) = 0$ 、 $f'(0) = 1$ ，证明 $f(z) = z$ 。
4. **9-D。**为什么保角纹理参数化仍可能有明显的面积拉伸？用 $|f'|$ 的变化解释。

10 调和函数与边界值问题

10.1 拉普拉斯方程：解析性的实变量侧面

在平面区域内，二阶连续可微的实函数 u 若满足

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

就称为调和函数。若 $f = u + iv$ 全纯，则柯西-黎曼条件与混合偏导交换给出 $\Delta u = \Delta v = 0$ 。全纯函数已知无穷次光滑，所以这里求二阶偏导没有额外问题。

物理上，在均匀介质、稳态且无内部热源的二维模型里，温度满足拉普拉斯方程；静电势与理想势流也出现相同的方程。不同边界条件代表不同物理问题，数学结构却可以复用。

10.2 调和共轭：什么时候能补出一个全纯函数？

给定调和函数 u ，希望找 v 使 $u + iv$ 全纯，就需要

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x, \quad dv = -u_y dx + u_x dy.$$

调和性恰好保证这个微分形式局部满足可积条件；在单连通区域上可沿路径积分，得到全局共轭函数，且只差一个实常数。在任意区域上总能局部找到共轭，但未必能全局找到。

反例。 $u(z) = \ln|z|$ 在穿孔平面调和，其局部共轭是辐角。若有全局单值共轭，就得到全局复对数；沿单位圆的辐角变化为 2π ，导致矛盾。再次看到孔洞控制整体可积性。

例题。 $u = x^2 - y^2$ 的共轭为 $v = 2xy + c$ ，从而 $f = z^2 + ic$ 。若 $u = x^2 + y^2$ ，则 $\Delta u = 4$ ，不是调和函数，因此在任何开集上都无法补成全纯函数的实部。

10.3 平均值性质与最大值原理

若闭圆盘位于定义域内，调和函数满足

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt.$$

可在稍大的圆盘内找调和共轭，对相应全纯函数的柯西公式取实部。中心的值等于周围圆周的平均，这解释了“没有内部源就不会凭空形成温度尖峰”的直觉。

调和函数的最大值原理说：非常数调和函数不能在区域内部取得局部最大值或最小值。由平均值性质，达到最大值会迫使周围一圈同值，再传播到整个连通区域。

10.4 泊松积分：给定圆周温度，重建内部

给定单位圆上连续的实边界函数 $g(\theta)$ 。对 $0 \leq r < 1$ ，定义泊松核

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}.$$

则圆盘内的 Dirichlet 问题有唯一连续到边界的调和解：

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)g(t) dt.$$

证明思路。核等于 $\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)$ ，因此积分在内部调和；核非负、平均为 1，且当 r 趋近 1 时集中到 $t = \theta$ ，从而恢复连续边界值。两个解的差在边界为零，最大值原理给出唯一性。

例题。若 $g(\theta) = \cos(3\theta)$ ，取 $f(z) = z^3$ ，即得

$$u(re^{i\theta}) = r^3 \cos(3\theta).$$

它在内部调和，边界匹配，因此由唯一性必为泊松解。一般的边界傅里叶模式 $\cos(n\theta)$ 与 $\sin(n\theta)$ 向内传播时分别乘以 r^n ，高频成分更快衰减。

10.5 唯一性与稳定性要分方向

从边界到内部，最大值原理给出稳健性：若两组连续边界值的差最多为 ε ，相应调和解的差在内部也不超过 ε 。但若反过来，从半径 $r < 1$ 上的含噪数据推断外边界，第 n 个傅里叶模式需要乘以 r^{-n} ，高频噪声会被指数放大。所以“边界值唯一决定内部”并不意味着任意数据恢复方向都良态。第一章关于含噪重建的提醒，可以在这里用一个精确的算式说明。

10.6 保角换域为什么能保持调和性？

若 φ 全纯且导数非零， U 在目标域二阶可微，链式法则与柯西-黎曼条件给出

$$\Delta(U \circ \varphi) = |\varphi'|^2 (\Delta U) \circ \varphi.$$

因此调和函数拉回后仍调和。可先把复杂域映到圆盘或上半平面，在简单域解边界值问题，再拉回来；同时必须正确变换边界数据。法向导数形式的边界条件还会带入缩放因子，不可直接照搬数值。

10.7 习题与自检

1. **10-A。**证明 $u = xy$ 调和，并求一个调和共轭。
2. **10-B。**单位圆上的边界值为 $2 + \cos \theta - 3 \sin(2\theta)$ ，写出圆盘内调和解。
3. **10-C。**在半径 $r = \frac{1}{2}$ 上测得第 20 个模式误差为 10^{-6} ，向外恢复到单位圆时，该模式误差放大为多少？

11 Python 实验：让定义与定理变得可观察

11.1 运行与复现

实验只依赖 NumPy 与 Matplotlib，不需要交互式 Notebook。完整脚本为 python/experiments.py，默认在项目的 figures/ 下输出九组 SVG 图，以及记录误差与验证结果的 results.json。每次运行都会重新生成这些结果；路径按脚本位置确定，不依赖当前工作目录。

首次使用可按 README.md 创建独立环境并安装依赖；已有环境下执行：

```
.venv/bin/python python/experiments.py
```

```
typst compile complex-analysis.typst output/pdf/complex-analysis.pdf
```

可以用 --output-dir 把实验结果输出到另一个目录。讲义使用已保存的 SVG 图，所以阅读和编译时不必重新运行 Python。

11.2 核心工具：参数化圆周并积分

下面是脚本中圆周积分的核心实现。圆取逆时针方向， f 需能处理 NumPy 复数数组，且不能在积分圆周上有奇点。

```
def circle_integral(f, *, center=0j, radius=1.0, n=1024):
    t = 2 * np.pi * np.arange(n) / n
    offset = radius * np.exp(1j * t)
    return 2 * np.pi * np.mean(
        f(center + offset) * 1j * offset
    )
```

这里 $z(t) = c + Re^{it}$ ，所以 $z'(t) = iRe^{it}$ 。圆周采样不重复终点；对周期被积函数，用“周期长度乘样本均值”形成周期梯形求积。若直接对同样这组不含终点的数组使用普通梯形积分，会漏掉最后一个小区间。

柯西公式的计算版本非常直接：

```
value = circle_integral(lambda z: np.exp(z) / (z-a)) / (2j*np.pi)
```

当 $|a| < 1$ 时，应接近 e^a 。当 a 靠近单位圆，核函数变化变尖锐，需要更多采样点；公式正确不意味着任何粗网格都能算准。

11.3 如何判断实验是否可信？

脚本用解析答案检查柯西重建、留数积分和泊松积分；用儒歇定理的严格根数核对相位绕数、对数导数积分与数值求根；用递推式核对前 15 个 Catalan 数；用指数函数精确导数比较差分误差。若超出预设误差，脚本抛出异常，而不会报告全部通过。

这些检查检验的是实现与选定样例，不是对一般定理的证明。图中英文坐标保证不同系统上无需额外安装中文绘图字体；数学含义在中文图注中说明。

11.4 实验 1—2：映射网格与方向差商

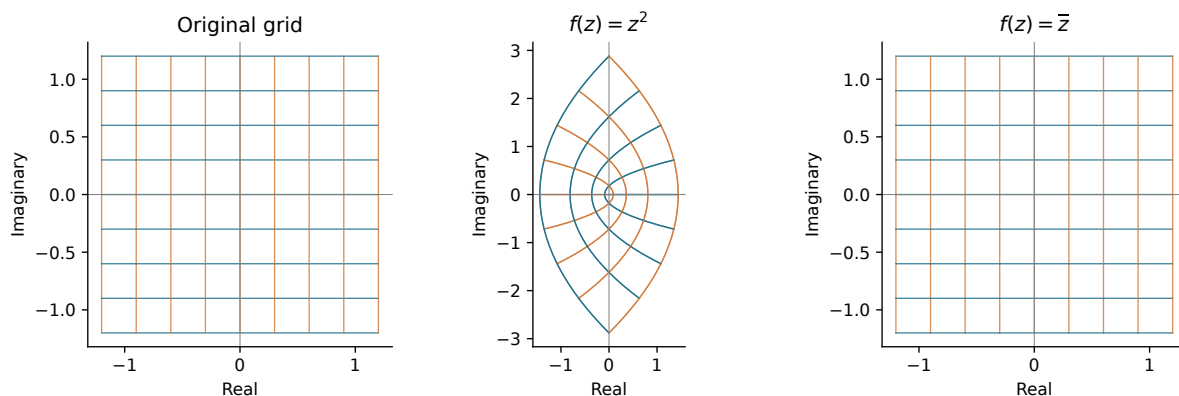


图 1 同一网格分别经过恒等映射、平方和共轭。平方在非零点保持局部有向夹角，但存在全局重叠；共轭反转方向。

先预测。平方会把辐角乘二，径向距离平方；共轭会翻转虚部。网格线本身可能弯曲，保角描述的是交点处切线之间的角度，不是说所有直线都仍为直线。平方在零点的导数为零，不适用保角结论。

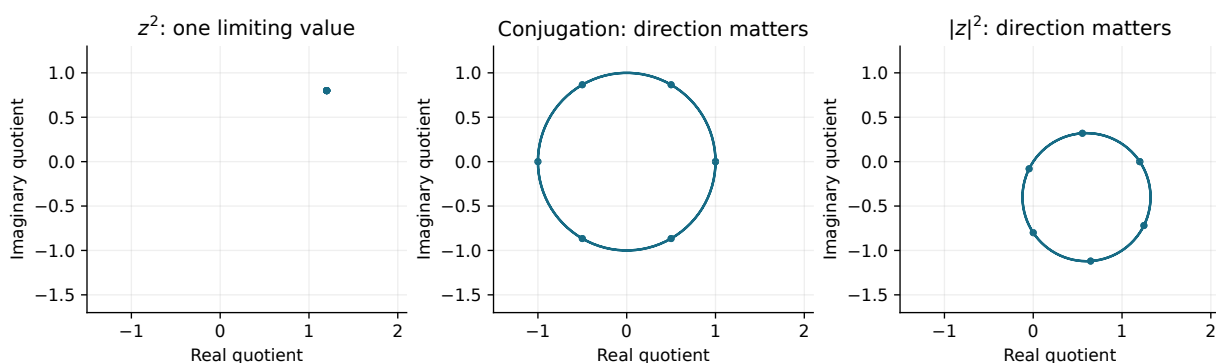


图 2 在 $z_0 = 0.6 + 0.4i$ 处，以不同角度取 $|h| = 10^{-6}$ ，绘制复差商的值。平方的结果聚在 $2z_0$ 附近，另外两个函数形成随方向变化的轨迹。

修改任务。把 z_0 改成零点。此时 $|z|^2$ 的差商也会趋于零，但它仍不是任何邻域上的全纯函数。这一实验对应“点上的可微”和“开集上的全纯”的区别。

实现入口。`grid_maps` 与 `directional_derivatives`。差商图画的是输出值的复平面，不是输入增量的平面。只尝试有限方向不能证明极限存在，反例却可能由两个方向直接发现。

11.5 实验 3—4：积分重建与收敛边界

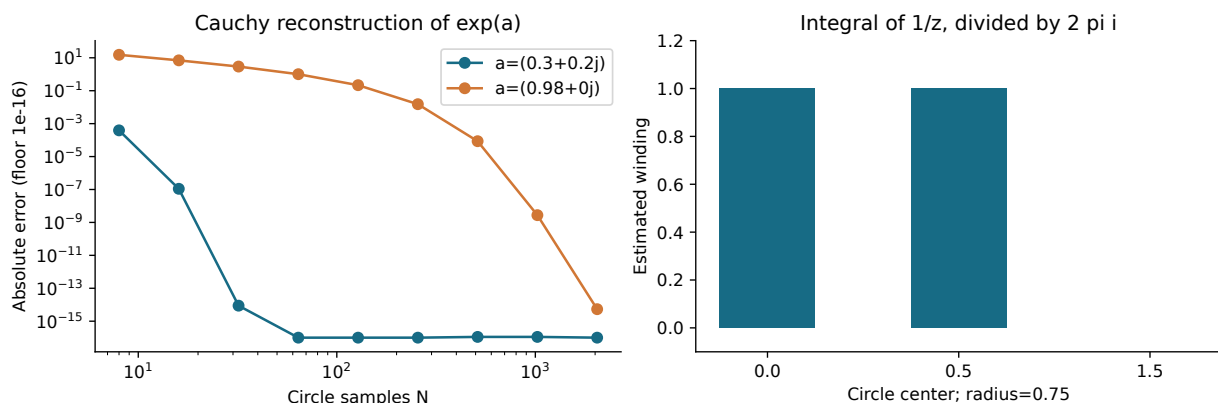


图 3 左：用单位圆上的数据重建 e^a ，接近边界的 $a = 0.98$ 需要更密采样。右：半径固定为 0.75，移动圆心，积分 $\frac{1}{z}$ 除以 $2\pi i$ 后分别为 1、1、0。

右图不是积分随圆心“平滑下降”，而是圆周穿过奇点时，定理条件暂时失效，绕数发生跳变。选用的三个圆周都没有穿过零点。误差图把小于 10^{-16} 的值显示在同一底线上，不能把图上的底线理解成精确误差。

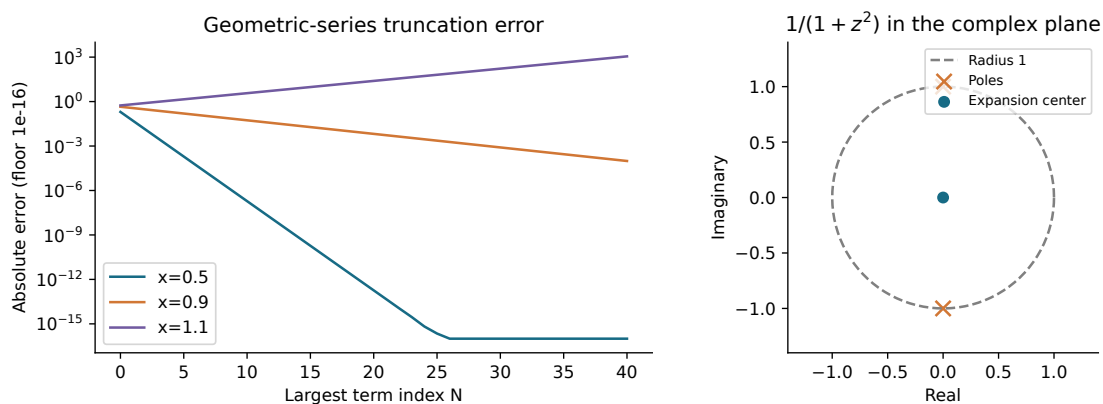


图 4 左： $\frac{1}{1+x^2}$ 的几何展开在圆内收敛、圆外发散；横坐标是最大求和下标 N ，多项式实际最高次数为 $2N$ 。右：决定半径的两个复极点。

修改任务。 把函数变为 $\frac{1}{1+25z^2}$ ，同时修改求和项，先预测新收敛半径。再试不同展开中心，观察“离最近奇点的距离”怎样改变可用的圆盘。

实现入口。 `cauchy_and_residues` 与 `taylor_convergence`。浮点数无法显示任意小的误差；在误差接近机器精度后，应关注舍入效应，而不是继续期待理想几何下降。

11.6 实验 5—6：数零点与解边界值问题

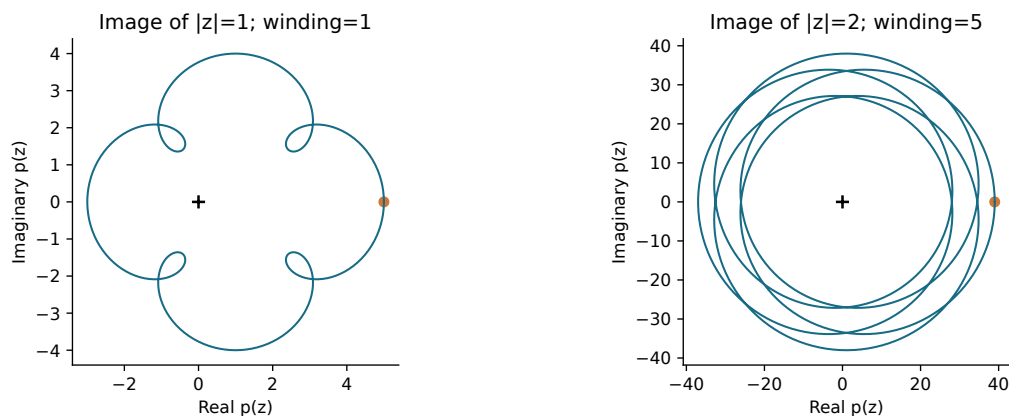


图 5 多项式 $p(z) = z^5 + 3z + 1$ 将半径 1 与 2 的圆映成两条曲线，对原点绕数分别为 1 与 5。橙点标出起点，黑色十字为原点。

观察。曲线看起来复杂，但总辐角变化只记录净绕数。脚本同时计算 $\frac{p'}{p}$ 的圆积分，并用 `np.roots` 做独立数值对照；本例的严格根数仍来自第八章的儒歇不等式。

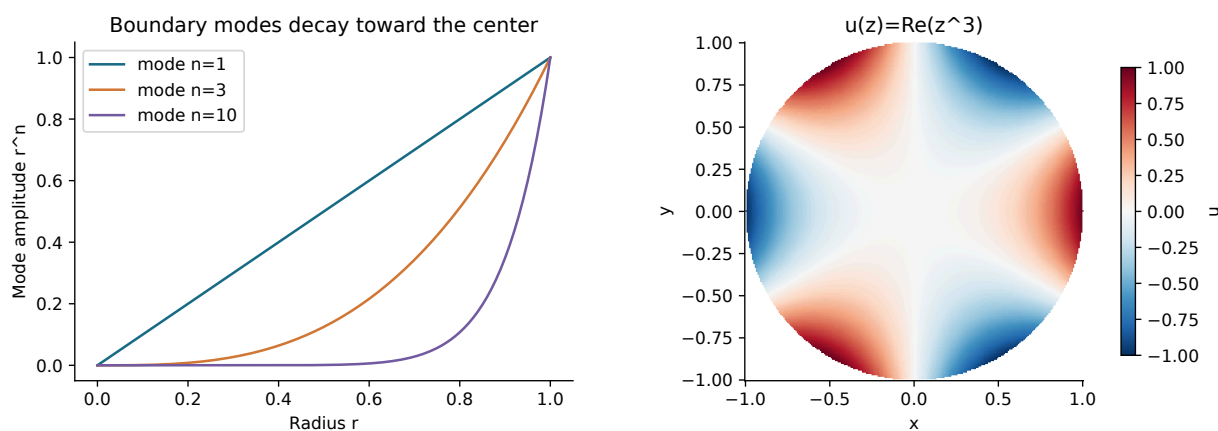


图 6 左：边界第 n 个傅里叶模式进入圆盘后乘以 r^n 。右：边界值为 $\cos(3\theta)$ 时，内部解为 $\text{Re}(z^3)$ 。

右图使用解析解绘制；脚本另在若干内部点直接数值积分泊松核，核对它与解析解的差。这能避免把“把答案画出来”误称为“已经数值求解并验证”。

修改任务。将 `poisson_value` 的 `mode` 改为 10，预测中心附近的幅度；把 r 推近 1 后增加积分点数，观察核变尖带来的采样需求。

11.7 实验 7—8：计数渐近与稳定求导

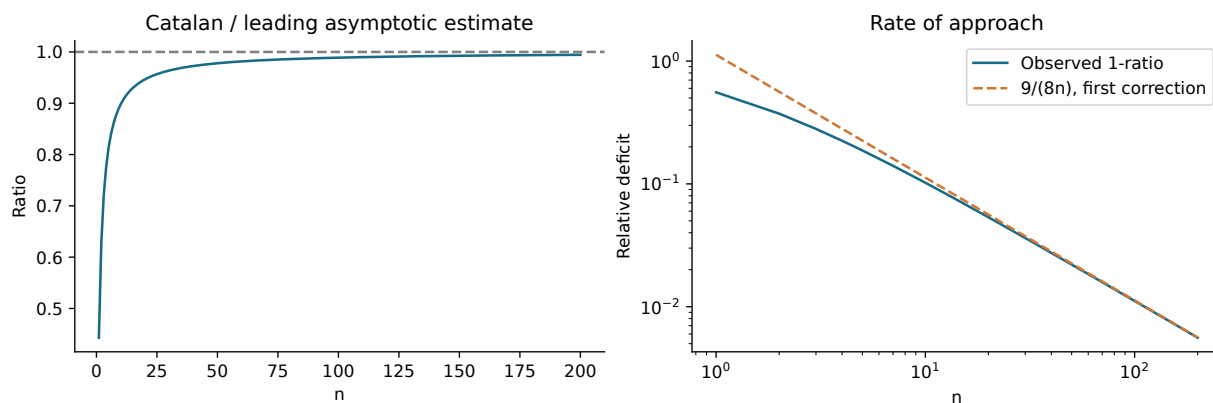


图 7 精确 Catalan 数除以 $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}$ ，比值趋于 1。右图比较相对缺口与一阶修正 $\frac{9}{8n}$ ；该修正来自 Stirling 展开的下一阶。

脚本用整数二项式系数计算精确计数，并用小规模递推交叉核对。比值缓慢趋近 1 提醒我们：渐近等价是极限结论，有限规模仍可能存在可见误差。这个实验检验公式的后果，并不证明平方根支点的转移定理。

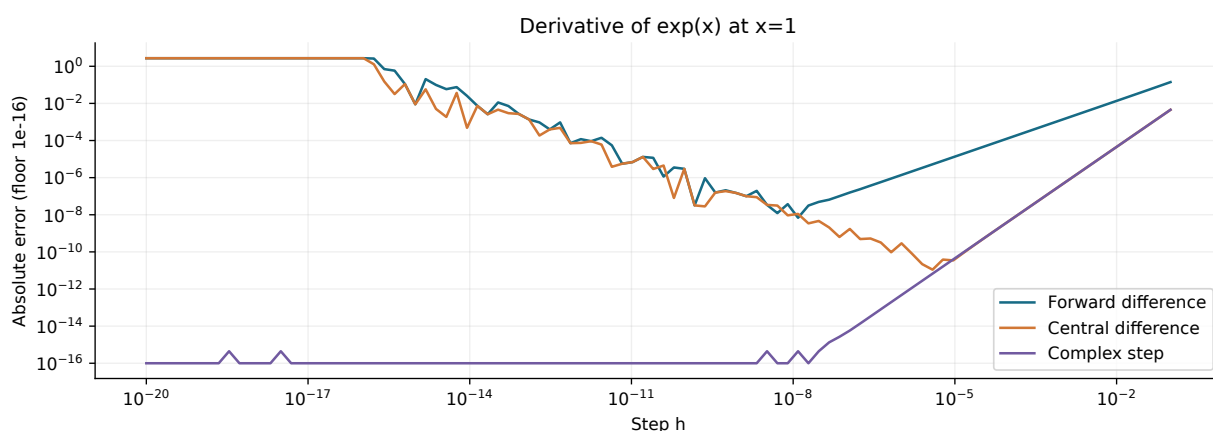


图 8 在 $x = 1$ 对 e^x 求导，比较前向差分、中心差分与复步长。接近数相减会使差分在步长过小时失准；复步长避免了这类消去。复步长的核心表达式是 $\text{np.imag}(\text{np.exp}(1 + 1j*h)) / h$ 。脚本还计算 $\text{np.imag}(\text{abs}(1 + 1j*h)) / h$ ，结果为零，而实函数 $|x|$ 在 $x = 1$ 的导数是 1。原因是 abs 没有按需要提供全纯延拓。

修改任务。 换成 $\sin x$ 或多项式，验证解析情形；再加入共轭或提取实部操作，观察方法怎样失败。图上误差底线仍是显示约定，不能据此声称所有算例都精确到 10^{-16} 。

11.8 实验 9：因果滤波器的极点与时间响应

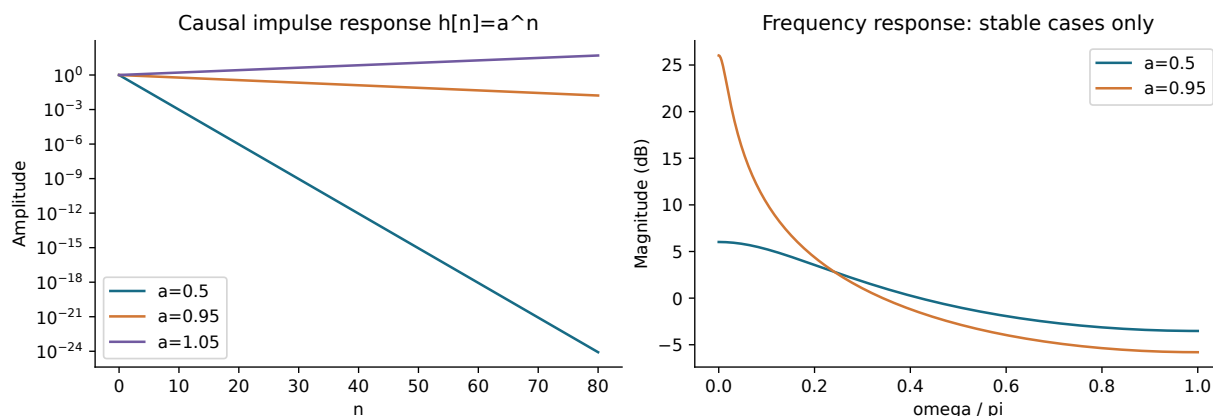


图9 左： $a = 0.5, 0.95, 1.05$ 的脉冲响应，半对数坐标突出衰减与增长。右：仅绘制两个稳定因果情形的频率响应。

为什么不画第三条频率响应？ 对因果序列 $h_n = 1.05^n$ ，Z 变换的收敛域为 $|z| > 1.05$ ，不包含单位圆。虽然可以把单位圆上的数代入有理表达式 $\frac{1}{1-az^{-1}}$ ，但该值不能直接称为这一因果系统的收敛 DTFT。代码特意区分了代数表达式与变换的收敛含义。

递推实现与闭式响应可以直接比较：

```
y = 0.0
impulse = []
for n in range(81):
    x = float(n == 0)
    y = 0.95 * y + x
    impulse.append(y)
# Compare with 0.95 ** np.arange(81).
```

修改任务。 改用 $a = 1$ ，输入从脉冲改为恒定 1。输出变为 $1, 2, 3, \dots$ ，说明脉冲响应不增长并不保证 BIBO 稳定。再取负的 a ，观察交替符号与极点辐角的关系。

11.9 从实验回到证明

每次实验建议记录四件事：理论预测；数值方法与参数；观测结果和误差；哪些结论仍需证明。特别注意三条边界：有限方向不能验证所有方向的极限；有限采样不能保证整条边界没有零点；有限个计数值不能证明渐近公式。

可继续扩展的项目包括：用自适应采样改进绕数估计；用柯西公式提取生成函数系数并分析舍入误差；把圆盘泊松问题通过 Möbius 变换搬到上半平面。这些扩展可以复用现有函数，但每次都应重新检查定义域与收敛条件。

附录：习题提示与课程复习

以下给出各题的结论或关键步骤，便于自学核对。先独立尝试，再看提示；“答案对了”仍需检查是否写明定理条件。

第二至四章

- **2-A:** $\frac{1-i}{2}$ ；三次根为 $2e^{2k\pi\frac{i}{3}}$, $k = 0, 1, 2$ 。
- **2-B:** 三者都是区域。圆盘与右半平面单连通；穿孔圆盘中绕零点的圆不能在域内缩成一点。
- **2-C:** 由 $|z| \leq |z-w| + |w|$ 得一侧不等式，再交换 z, w 。
- **2-D:** 小闭圆盘上尾和由 $\frac{r^{N+1}}{1-r}$ 控制；整个开圆盘上，尾和 $\frac{z^{N+1}}{1-z}$ 对每个固定 N 在 $z \rightarrow 1^-$ 时无界。
- **3-A:** 实方向差商为 1，虚方向为 0，所以处处不复可微。
- **3-B:** $z = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$ 。模给出实部，辐角给出虚部。
- **3-C:** $f = e^z + ic$ ，其中 c 为实数；可由柯西-黎曼条件积分，或利用差函数的实部恒为零。
- **3-D:** 非零点导数为 $2z \neq 0$ ；但全局有 $z^2 = (-z)^2$ 。
- **4-A:** 单位圆上 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ，所以第一项为 $2\pi i$ ； z^2 有原函数，第二项为零。
- **4-B:** 原函数为 z^2 ，结果为 $(1+i)^2 = 2i$ 。
- **4-C:** 可要求函数在单连通区域全纯，曲线位于该区域；或要求在简单闭曲线及其内部附近全纯。
- **4-D:** ML 上界是 π ，不趋零；直接参数化上半圆，积分恰为 πi 。

第五至七章

- **5-A:** $2\pi i \cos'(0) = 0$ 。
- **5-B:** 固定 a ，半径 R 圆上 $M \leq C(1 + |a| + R)$ ；柯西估计使 $f''(a) = 0$ 。于是 f' 为常数， f 是仿射函数。
- **5-C:** 不能达到 3；若内部达到 2，则函数必须为模为 2 的常数。常函数确实给出后一种可能。
- **6-A:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ ，收敛半径为 2。
- **6-B:** 依次是可去奇点、二阶极点、本性奇点。第二项用 $1 - \cos z = \frac{z^2}{2} + O(z^4)$ 。
- **6-C:** $\frac{1}{n}$ 在域内聚于 0，使用恒等定理；只知道整数处为零不够，反例为 $\sin(\pi z)$ 。
- **7-A:** 展开后一次负幂系数为 1。
- **7-B:** 留数在 $2i$ 处为 $\frac{1}{4i}$ ，积分为 $\frac{\pi}{2}$ ；圆弧上界为 $\pi \frac{R}{R^2-4}$ 。
- **7-C:** 单位圆内极点为 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ，积分为 $2\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ 。
- **7-D:** 洛朗主部仍含 z^{-2} ，函数无界，违反可去奇点判据。

第八至十章

- **8-A:** 单位圆上 $|z^4 + 1| \leq 2 < 4 = |4z|$ ，应用儒歇定理。
- **8-B:** 零点总重数为 2，极点总阶数为 1，所以积分为 $2\pi i$ 。
- **8-C:** 主值会跳变，起终点相同不记录中间绕行；单位圆的连续辐角净增量为 2π 。
- **8-D:** 解析延拓保留函数在原域上的值，不改变原级数的收敛半径。
- **9-A:** $T'(z) = 2\frac{i}{(z+i)^2}$ ，上半平面内处处有定义且非零。
- **9-B:** $\frac{z^2-i}{z^2+i}$ 。第一象限的平方恰好覆盖上半平面。
- **9-C:** Schwarz 引理等号情形给 $f = e^{i\theta}z$ ，再由导数为 1 得 $e^{i\theta} = 1$ 。
- **9-D:** 面积的一阶缩放因子是 $|f'|^2$ ；它可随位置显著变化，角度保持并不约束面积一致。
- **10-A:** 二阶偏导都为零；可取 $v = \frac{y^2 - x^2}{2}$ 。
- **10-B:** $u = 2 + r \cos \theta - 3r^2 \sin(2\theta)$ 。
- **10-C:** 误差为 $2^{20} \times 10^{-6} = 1.048576$ ，虽原始误差很小，外推后已达常数量级。

按一个学期复习

阶段	理论重点	应能独立完成
第 1—3 周	第二、三章：复平面、全纯、初等函数	判断复可微；给对数选支路
第 4—6 周	第四、五章：积分、柯西公式	参数化围道；导出刘维尔定理
第 7—9 周	第六、七章：展开、奇点、留数	写明展开圆环；完整求一个实积分
第 10—11 周	第八章：辐角原理与儒歇定理	不显式求根，严格数出圆内根数
第 12—14 周	第九、十章：保角与调和	构造换域；解圆盘边界值问题
第 15—16 周	第十一章实验与综合复习	解释数值误差；连接三个动机案例

这是自学节奏建议，不对应某所学校的正式课时。数学系课程通常还会要求更多证明题和较长作业；每章现有习题可作为最小自检集合。

后续阅读与讲义边界

核心课程范围可对照 [UC Berkeley Math 185](#)，配套例题可参看 [MIT 18.04 讲义](#)。本讲义对古萨定理只给证明骨架，对复反函数定理、卡索拉蒂-魏尔斯特拉斯定理、单值化定理、黎曼映射定理明确不证。第一章的解析组合学与控制应用超出核心证明范围，分别按该章的原始书目继续学习。

阅读时最值得反复追问的是：函数在哪个区域全纯？积分曲线能否变形？是否跨过奇点或支割线？使用的级数在哪个圆盘或圆环收敛？一个结论是严格证明、数值证据，还是基于条件的近似？能把这些问题说清楚，就已经建立了继续学习复分析的基础。