

微分几何知识大纲

本文整理大学数学系需要掌握的微分几何主线。重点不是孤立记忆曲率公式，而是理解：怎样从曲线和曲面的局部计算，逐步抽象到流形、度量、联络和曲率，再用这些局部数据研究空间的整体拓扑。

目录

1. 总体逻辑	2	10.3. 指数映射	14
2. 预备知识	2	10.4. 完备性和 Hopf-Rinow 定理	14
3. 欧氏空间中的曲线	3	10.5. 割点和共轭点	14
3.1. 正则曲线和参数	3	10.6. 逻辑关系	14
3.2. 曲率	3	11. 曲率张量	15
3.3. 挠率和 Frenet 标架	4	11.1. Riemann 曲率	15
3.4. 逻辑关系	4	11.2. 截面曲率	15
4. 欧氏空间中的曲面	4	11.3. Ricci 曲率和标量曲率	15
4.1. 参数曲面和切平面	4	11.4. 常曲率空间	16
4.2. 第一基本形式	5	11.5. 曲率正性的强弱	16
4.3. 第二基本形式和形算子	5	11.6. Jacobi 场的曲率直觉	16
4.4. 典型曲面	6	12. 一个完整的坐标计算流程	16
4.5. Gauss 绝妙定理	6	12.1. 欧氏平面的极坐标	17
4.6. 逻辑关系	6	12.2. 球面坐标	17
5. 光滑流形	6	12.3. 计算时的常见检查	17
5.1. 为什么需要流形	6	13. 子流形几何	17
5.2. 典型例子	7	13.1. 切空间和法空间分解	17
5.3. 光滑映射和微分同胚	7	13.2. 平均曲率和极小子流形	18
6. 切空间和微分	7	13.3. Gauss 方程	18
6.1. 切向量	7	13.4. Gauss-Codazzi 方程	18
6.2. 映射的微分	8	13.5. 逻辑关系	18
6.3. 向量场和 Lie 括号	8	14. 整体微分几何	18
6.4. 逻辑关系	8	14.1. Gauss-Bonnet 定理	18
7. 余切空间、张量和微分形式	9	14.2. Chern-Gauss-Bonnet 定理	19
7.1. 余切向量和张量	9	14.3. Bonnet-Myers 定理	19
7.2. 微分形式	9	14.4. Cartan-Hadamard 定理	19
7.3. 外微分	9	14.5. Synge 定理	19
7.4. 拉回和 Stokes 定理	10	14.6. 比较几何	20
7.5. de Rham 上同调	10	15. 特征类和曲率	20
7.6. 逻辑关系	10	16. 与 Hopf 猜想的接口	20
8. Riemann 度量	10	17. 常见混淆	21
8.1. 度量的定义	10	18. 更高阶方向	21
8.2. 长度、能量和距离	11	19. 推荐学习顺序	22
8.3. 体积元	11		
8.4. 梯度、散度和 Laplace-Beltrami 算子	11		
8.5. 等距和共形	11		
8.6. 逻辑关系	12		
9. 联络和协变导数	12		
9.1. 为什么普通导数不够	12		
9.2. Christoffel 符号	12		
9.3. Levi-Civita 联络	12		
9.4. 沿曲线的协变导数	13		
9.5. 逻辑关系	13		
10. 测地线和指数映射	13		
10.1. 测地线方程	13		
10.2. 变分观点	14		

1. 总体逻辑

微分几何的主线可以这样组织：

1. 欧氏空间中的曲线
2. 欧氏空间中的曲面
3. 光滑流形和坐标图
4. 切空间、余切空间和张量
5. 微分形式和积分
6. Riemann 度量
7. 联络和平行移动
8. 测地线和指数映射
9. Riemann 曲率
10. 子流形的内蕴与外蕴几何
11. 局部曲率与整体拓扑

其中最核心的抽象是：

- 流形提供可以做微积分的空间。
- 切空间把流形在一点附近线性化。
- Riemann 度量在每个切空间上定义长度和角度。
- 联络比较不同点的切向量，并定义沿曲线的导数。
- 测地线是局部最直的曲线，也是长度泛函的临界点。
- 曲率衡量平行移动、二阶导数和欧氏几何规律失效的程度。
- 整体微分几何研究局部曲率怎样限制距离、体积、基本群和 Euler 示性数。

微分几何中要始终区分三层对象：

- **坐标表达：** g_{ij} 、 Γ_{ij}^k 、 R_{ijk}^l 等分量。
- **坐标无关对象：**度量 g 、联络 ∇ 、曲率张量 R 。
- **几何或拓扑结论：**距离、完备性、曲率符号、Euler 示性数等。

坐标是计算工具，不是几何对象本身。一个正确的公式应该在换坐标后描述同一个对象。

2. 预备知识

学习微分几何需要几条基础主线。

多元微积分：

- 偏导数、方向导数和全微分。
- 反函数定理和隐函数定理。
- 多重积分和变量替换。

线性代数：

- 向量空间、对偶空间和线性映射。
- 内积、正交分解和二次型。
- 行列式、特征值和矩阵对角化。
- 多重线性映射和外代数。

拓扑与分析：

- 开集、紧致性、连通性和商空间。
- 一致收敛、常微分方程的存在唯一性。

- 基本群、同调和上同调的初步概念。

依赖关系可以概括为：

$$\text{多元微积分} \rightarrow \text{局部坐标计算} \quad (1)$$

$$\text{线性代数} \rightarrow \text{切空间、度量和张量} \quad (2)$$

$$\text{拓扑} \rightarrow \text{流形和整体结论} \quad (3)$$

$$\text{常微分方程} \rightarrow \text{测地线和平行移动} \quad (4)$$

3. 欧氏空间中的曲线

3.1. 正则曲线和参数

一条参数曲线写作：

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t) \quad (5)$$

若对所有 $t \in I$ 都有

$$\gamma'(t) \neq 0, \quad (6)$$

则称 γ 是正则曲线。 $\gamma'(t)$ 是速度向量， $|\gamma'(t)|$ 是速率。

曲线在区间 $[a, b]$ 上的长度为：

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (7)$$

长度与保持方向的重新参数化无关。这说明参数 t 只是描述曲线的工具，曲线的几何形状不应依赖具体参数。

弧长参数定义为：

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du \quad (8)$$

用弧长 s 作为参数后：

$$|\gamma'(s)| = 1 \quad (9)$$

单位速曲线使后续曲率公式最简单。

3.2. 曲率

对单位速曲线，单位切向量为：

$$T(s) = \gamma'(s) \quad (10)$$

因为 $|T| = 1$ ，对 s 求导得到 $T'(s)$ 与 $T(s)$ 正交。曲率定义为：

$$\kappa(s) = |T'(s)| \quad (11)$$

曲率越大，曲线偏离直线越快。若 $\kappa > 0$ ，主法向量为：

$$N(s) = T' \frac{s}{\kappa(s)} \quad (12)$$

对一般参数曲线 $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \quad (13)$$

平面圆 $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ 的曲率恒为:

$$\kappa = \frac{1}{r} \quad (14)$$

所以半径越小, 弯曲越强; 直线可以看成曲率为 0 的极限情形。

3.3. 挠率和 Frenet 标架

在 $\mathbb{R}^3$ 中定义副法向量:

$$B = T \times N \quad (15)$$

对单位速且 $\kappa > 0$ 的曲线, Frenet-Serret 公式是:

$$T' = \kappa N \quad (16)$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \quad (17)$$

$$B' = -\tau N \quad (18)$$

其中 τ 是挠率。一般参数下:

$$\tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \times \gamma''|^2} \quad (19)$$

曲率描述曲线如何弯离切线, 挠率描述曲线如何离开密切平面。平面曲线的挠率为 0; 圆柱螺线通常同时具有非零常曲率和非零常挠率。

3.4. 逻辑关系

- 参数化给出计算曲线的方式。
- 弧长消除参数速度的影响。
- 曲率是切向量的一阶变化, 也是位置向量的二阶信息。
- 在三维中, 曲率和挠率在刚体运动意义下基本决定曲线的局部形状。

需要掌握:

- 判断曲线是否正则。
- 计算长度并改用弧长参数。
- 计算平面曲线和空间曲线的曲率。
- 理解曲率是几何量, 而 $\gamma''(t)$ 本身依赖参数。

4. 欧氏空间中的曲面

4.1. 参数曲面和切平面

局部参数曲面写作:

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto X(u, v) \quad (20)$$

若

$$X_u \times X_v \neq 0, \quad (21)$$

则 X 是正则参数化。点 $p = X(u, v)$ 处的切平面由 X_u, X_v 张成：

$$T_p M = \text{span}\{X_u, X_v\} \quad (22)$$

选择单位法向量：

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \quad (23)$$

法向量的选择对应曲面的定向。把 N 换成 $-N$ 会改变部分外蕴曲率的符号，但不会改变 Gaussian 曲率。

4.2. 第一基本形式

曲面的第一基本形式是欧氏内积在切平面上的限制：

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (24)$$

其中：

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v \quad (25)$$

若曲线上的曲线写成 $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ，则：

$$|\alpha'(t)|^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 \quad (26)$$

因此第一基本形式决定：

- 曲线长度；
- 两个切向量的夹角；
- 曲面区域的面积。

面积元为：

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (27)$$

4.3. 第二基本形式和形算子

曲面怎样弯曲在 $\mathbb{R}^3$ 中，由法向量的变化描述。形算子定义为：

$$S = -dN \quad (28)$$

第二基本形式定义为：

$$\text{II}(V, W) = I(SV, W) \quad (29)$$

在坐标中：

$$\text{II} = e du^2 + 2f du dv + g dv^2 \quad (30)$$

$$e = X_{uu} \cdot N, \quad f = X_{uv} \cdot N, \quad g = X_{vv} \cdot N \quad (31)$$

形算子 S 的特征值 κ_1, κ_2 称为主曲率，对应方向称为主方向。

Gaussian 曲率和平均曲率分别是：

$$K = \det S = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (32)$$

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} S = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (33)$$

改变法向量方向会使 κ_1, κ_2, H 变号，但 K 不变。

4.4. 典型曲面

平面：

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0, \quad K = H = 0 \quad (34)$$

半径为 r 的球面：

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \pm \frac{1}{r}, \quad K = \frac{1}{r^2} \quad (35)$$

圆柱面：

$$\kappa_1 = \pm \frac{1}{r}, \quad \kappa_2 = 0, \quad K = 0 \quad (36)$$

马鞍面 $z = x^2 - y^2$ 在原点附近有一正一负两个主曲率，所以 $K < 0$ 。

球面和平面局部几何不同；圆柱虽然看起来弯曲，但 $K = 0$ ，可以把纸张卷成圆柱而不拉伸。这预示 Gaussian 曲率只由曲面内部的长度测量决定。

4.5. Gauss 绝妙定理

第一基本形式看起来只记录长度和角度，第二基本形式才记录曲面在 $\mathbb{R}^3$ 中的弯曲。但 Gauss 的绝妙定理说明：

Gaussian 曲率 K 可以完全由第一基本形式及其导数计算，因此是内蕴几何量。

如果两个曲面局部等距，它们的 Gaussian 曲率必须对应相等。平面和圆柱都满足 $K = 0$ ，所以纸张可以无拉伸地卷成圆柱；球面满足 $K > 0$ ，无法无失真地铺平成平面。

4.6. 逻辑关系

- 第一基本形式描述曲面内部可测的长度、角度和面积。
- 第二基本形式描述曲面相对于环境空间的弯曲。
- 主曲率是形算子的特征值。
- Gaussian 曲率虽然由主曲率定义，却是内蕴量。
- 平均曲率依赖嵌入，是极小曲面理论的核心对象。

5. 光滑流形

5.1. 为什么需要流形

参数曲面只处理二维对象，而且经常假设它嵌入 $\mathbb{R}^3$ 。更一般的空间可能维数更高，也可能没有一个自然的外部欧氏空间。流形把“局部可以使用坐标做微积分”作为基本结构。

一个 n 维拓扑流形 M 满足：

- M 是 Hausdorff 空间；
- M 有可数拓扑基；
- 每个点都有邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的开集。

坐标图是二元组 (U, φ) ：

$$\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \quad (37)$$

若两个坐标图重叠，坐标变换为：

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (38)$$

当所有坐标变换都是 C^∞ 时，就得到光滑流形。

5.2. 典型例子

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是最基本的流形。

球面：

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\} \quad (39)$$

它不能由一张全局坐标图无奇点覆盖，但可以使用多个局部坐标图。

环面可以写成商空间：

$$T^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n} \quad (40)$$

矩阵群 $GL(n, \mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中行列式非零的开集，因此也是光滑流形。

若 M, N 分别是 m, n 维流形，则乘积 $M \times N$ 是 $m + n$ 维流形。

若光滑映射 $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ 在水平集 $F^{-1}(c)$ 上满足：

$$\text{rank}(dF) = k, \quad (41)$$

则正则值定理说明 $F^{-1}(c)$ 是 $m - k$ 维子流形。球面就是 $F(x) = |x|^2$ 的正则水平集。

5.3. 光滑映射和微分同胚

映射 $F : M \rightarrow N$ 是否光滑，通过局部坐标表达判断：

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \quad (42)$$

必须是欧氏空间之间的光滑映射。

若 F 双射、 F 和 F^{-1} 都光滑，则称 F 是微分同胚。微分几何通常把微分同胚的流形看作相同的光滑空间。

同胚只保留拓扑结构，微分同胚还保留光滑结构，等距映射则进一步保留 Riemann 度量：

$$\text{等距} \Rightarrow \text{微分同胚} \Rightarrow \text{同胚} \quad (43)$$

反向一般不成立。

6. 切空间和微分

6.1. 切向量

在曲面中，切向量可以看成曲线上一点的速度。这个定义推广到任意流形：若两条经过 p 的曲线 γ_1, γ_2 在某张坐标图中有相同速度，就把它视为同一个切向量。

点 p 处所有切向量组成 n 维向量空间：

$$T_p M \quad (44)$$

在局部坐标 $(x^1, \dots, x^n)$ 中，自然基为：

$$\partial_1, \dots, \partial_n \quad (45)$$

其中 ∂_i 也可以看成对光滑函数求方向导数的算子：

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (46)$$

因此切向量还有等价定义：它是在 p 点作用于光滑函数、满足 Leibniz 法则的导子。

6.2. 映射的微分

光滑映射 $F : M \rightarrow N$ 在 p 点诱导线性映射：

$$dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N \quad (47)$$

若 $v = \gamma'(0)$ ，则：

$$dF_{p(v)} = (F \circ \gamma)'(0) \quad (48)$$

链式法则写成：

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p \quad (49)$$

在坐标中， dF_p 就是 Jacobian 矩阵。抽象微分是 Jacobian 的坐标无关版本。

6.3. 向量场和 Lie 括号

向量场为每个点光滑地选择一个切向量：

$$X_p \in T_p M \quad (50)$$

局部写作：

$$X = \sum_i X^i \partial_i \quad (51)$$

向量场作用在函数上：

$$Xf = \sum_i X^i \partial_i f \quad (52)$$

两个向量场的 Lie 括号定义为：

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (53)$$

坐标表达为：

$$[X, Y]^k = \sum_i (X^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i X^k) \quad (54)$$

$[X, Y] = 0$ 表示两个向量场生成的局部流在一阶意义下可交换。Lie 括号也是联络的挠率和 Frobenius 可积性定理中的基本对象。

6.4. 逻辑关系

- 切空间是流形的一阶线性近似。
- 映射的微分在线性近似之间传递切向量。
- 向量场是切空间随点变化形成的光滑截面。
- Lie 括号测量两个无穷小方向的不交换性。

7. 余切空间、张量和微分形式

7.1. 余切向量和张量

切空间的余切空间称为余切空间：

$$T_p^*M = \{\omega : T_pM \rightarrow \mathbb{R} \text{ 为线性映射}\} \quad (55)$$

坐标基 ∂_i 的对偶基写作：

$$dx^1, \dots, dx^n \quad (56)$$

它们满足：

$$dx^{i(\partial_j)} = \delta_j^i \quad (57)$$

一个 (r, s) 型张量在每一点都包含 r 个逆变方向和 s 个协变方向；等价地，它属于 r 份切空间与 s 份余切空间的张量积。实际计算中常见的对象包括：

- 函数： $(0, 0)$ 型张量；
- 向量场： $(1, 0)$ 型张量；
- 1-形式： $(0, 1)$ 型张量；
- Riemann 度量：对称 $(0, 2)$ 型张量；
- 曲率张量：可写成 $(1, 3)$ 或 $(0, 4)$ 型张量。

7.2. 微分形式

k -形式是完全反对称的 $(0, k)$ 型张量。局部可以写成：

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (58)$$

外积满足：

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \quad (59)$$

其中 α 是 k -形式， β 是 l -形式。特别地，1-形式满足：

$$\alpha \wedge \alpha = 0 \quad (60)$$

7.3. 外微分

外微分把 k -形式变成 $k+1$ -形式：

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) \quad (61)$$

对函数 f ：

$$df = \sum_i \partial_i f dx^i \quad (62)$$

它满足：

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \quad (63)$$

$$d \circ d = 0 \quad (64)$$

满足 $d\omega = 0$ 的形式称为闭形式；能写成 $\omega = d\eta$ 的形式称为恰当形式。每个恰当形式都是闭形式，但反向是否成立取决于空间的整体拓扑。

7.4. 拉回和 Stokes 定理

光滑映射 $F : M \rightarrow N$ 可以把 N 上的微分形式拉回到 M ：

$$F^* : \Omega^{k(N)} \rightarrow \Omega^{k(M)} \quad (65)$$

拉回与外微分可交换：

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega) \quad (66)$$

Stokes 定理统一了微积分中的多个积分定理：

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (67)$$

它包含微积分基本定理、Green 公式、Gauss 散度定理和经典 Stokes 公式。

7.5. de Rham 上同调

闭形式模去恰当形式得到 de Rham 上同调：

$$H_{\text{dR}}^{k(M)} = \frac{\ker(d_k)}{\text{im}(d_{k-1})} \quad (68)$$

de Rham 定理说明，微分形式得到的上同调与拓扑定义的实系数上同调一致。这是“用微积分探测拓扑”的核心桥梁。

7.6. 逻辑关系

- 余切向量作用在切向量上。
- 张量把线性代数对象逐点放到流形上。
- 微分形式适合积分，因为反对称性自动编码定向体积。
- $d^2 = 0$ 产生上同调，局部微分方程由此连接到整体拓扑。

8. Riemann 度量

8.1. 度量的定义

Riemann 度量 g 在每个切空间 $T_p M$ 上给出正定内积 g_p ，并随 p 光滑变化。

局部坐标中：

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \quad (69)$$

矩阵 (g_{ij}) 对称正定。对切向量

$$v = \sum_i v^i \partial_i \quad (70)$$

有：

$$|v|_g^2 = g(v, v) = \sum_{i,j} g_{ij} v^i v^j \quad (71)$$

Riemann 流形是二元组 (M, g) 。同一个光滑流形可以承载许多不同度量，因此“流形的拓扑”和“所选度量的几何”必须分开。

8.2. 长度、能量和距离

分段光滑曲线 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ 的长度：

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \quad (72)$$

能量：

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b g(\gamma', \gamma') dt \quad (73)$$

两点间的 Riemann 距离定义为：

$$d(p, q) = \inf_{\{\gamma: p \rightarrow q\}} L(\gamma) \quad (74)$$

长度与重新参数化无关，能量一般依赖参数。固定端点和时间区间时，常速最短曲线同时最小化能量。

8.3. 体积元

若 $g = (g_{ij})$ ，则 Riemann 体积元为：

$$d \text{ vol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n \quad (75)$$

积分写成：

$$\int_M f d \text{ vol}_g \quad (76)$$

这里的行列式因子正是坐标变化时补偿 Jacobian 的部分，使积分不依赖所选坐标。

8.4. 梯度、散度和 Laplace–Beltrami 算子

梯度由下式定义：

$$g(\text{grad } f, X) = df(X) \quad (77)$$

局部坐标中：

$$(\text{grad } f)^i = \sum_j g^{ij} \partial_j f \quad (78)$$

散度为：

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (\sqrt{\det g} X^i) \quad (79)$$

Laplace–Beltrami 算子为：

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) \quad (80)$$

符号约定不同的书可能使用 $-\Delta$ 。它是欧氏 Laplace 算子在 Riemann 流形上的自然推广。

8.5. 等距和共形

若微分同胚 $F : (M, g) \rightarrow (N, h)$ 满足：

$$F^* h = g, \quad (81)$$

则 F 是等距映射，它保持长度、角度、距离和曲率。

若：

$$F^*h = e^{2u}g, \quad (82)$$

则 F 是共形映射，它保持角度，但通常不保持长度和曲率。

8.6. 逻辑关系

- 光滑结构允许求导，Riemann 度量允许测量。
- 度量诱导长度、距离、体积和微分算子。
- 度量把切空间与余切空间对应起来，因此可以把 df 转成 $\text{grad } f$ 。
- 等距是 Riemann 几何中真正保持全部度量信息的映射。

9. 联络和协变导数

9.1. 为什么普通导数不够

在 $\mathbb{R}^n$ 中，不同点的切空间可以自然视为同一个向量空间，所以可以直接比较向量。一般流形上， T_pM 和 T_qM 是不同空间，表达式

$$X(q) - X(p) \quad (83)$$

没有天然意义。联络规定怎样沿方向求向量场的导数。

仿射联络写作：

$$\nabla_X Y \quad (84)$$

它对 X 是函数线性的，对 Y 满足 Leibniz 法则：

$$\nabla_{X(fY)} = X(f)Y + f\nabla_X Y \quad (85)$$

9.2. Christoffel 符号

在局部坐标中，联络由下式确定：

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (86)$$

对

$$X = X^i \partial_i, \quad Y = Y^j \partial_j \quad (87)$$

有：

$$(\nabla_X Y)^k = X^i \partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \quad (88)$$

Christoffel 符号本身不是张量，因为换坐标时会出现坐标变换的二阶导数。 $\nabla_X Y$ 整体却是坐标无关的向量场。

9.3. Levi-Civita 联络

Riemann 度量唯一确定一个同时满足下列条件的联络：

无挠：

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (89)$$

度量相容：

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (90)$$

这个唯一联络称为 Levi-Civita 联络。它的坐标公式为：

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (91)$$

其中 (g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵，并使用重复指标求和约定。

9.4. 沿曲线的协变导数

设 $V(t)$ 是沿曲线 $\gamma(t)$ 的向量场。协变导数写作：

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\gamma'} V \quad (92)$$

坐标表达为：

$$\left(\frac{DV}{dt} \right)^k = \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \gamma'^i V^j \quad (93)$$

若：

$$\frac{DV}{dt} = 0, \quad (94)$$

则称 V 沿 γ 平行。给定初值 $V(a)$ ，平行移动方程是一阶线性常微分方程，因此局部存在唯一解。

度量相容性保证平行移动保持向量的长度和夹角。

9.5. 逻辑关系

- 联络使不同点的切空间可以沿曲线比较。
- Christoffel 符号是联络在坐标中的系数，不是曲率。
- Levi-Civita 联络由度量唯一确定。
- 平行移动、测地线、Hessian 和曲率都依赖联络。

10. 测地线和指数映射

10.1. 测地线方程

测地线定义为切向量沿自身平行的曲线：

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \quad (95)$$

坐标形式是二阶常微分方程：

$$\gamma''^k + \Gamma_{ij}^k \gamma'^i \gamma'^j = 0 \quad (96)$$

给定初始位置和初始速度：

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v \quad (97)$$

测地线在局部唯一存在。

欧氏空间中的测地线是直线。球面上的测地线是大圆，而不是任意纬线。

10.2. 变分观点

测地线是能量泛函的临界点。对固定端点的曲线变分 γ_s ，第一变分公式给出：

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} E(\gamma_s) = - \int_a^b g\left(V, \frac{D\gamma'}{dt}\right) dt \quad (98)$$

因此所有固定端点变分的一阶变化都为零，当且仅当：

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \quad (99)$$

测地线只保证局部“直”，不一定在任意长区间上都是全局最短路。球面上大圆弧超过半圆后便不再最短。

10.3. 指数映射

对 $v \in T_p M$ ，令 γ_v 是满足 $\gamma_v(0) = p$ 、 $\gamma_v'(0) = v$ 的测地线。指数映射定义为：

$$\text{Exp}_{p(v)} = \gamma_v(1) \quad (100)$$

在 $0 \in T_p M$ 附近， Exp_p 是局部微分同胚，由此得到法坐标。

在法坐标中心 p ：

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad (101)$$

但 Christoffel 符号在一点消失不代表曲率消失，因为曲率还包含 Γ 的一阶导数。法坐标只能消去一阶的坐标效应，不能消去真正的二阶几何信息。

10.4. 完备性和 Hopf-Rinow 定理

Riemann 流形测地完备，是指每条测地线可以对所有 $t \in \mathbb{R}$ 延伸。对连通 Riemann 流形，Hopf-Rinow 定理把下列性质联系起来：

- 作为度量空间 (M, d) 是完备的；
- 流形测地完备；
- 每个闭有界集合紧致；
- 任意两点之间存在一条最短测地线。

紧致且无边界的 Riemann 流形自动完备。开单位球带欧氏度量则不完备，因为测地线可以在有限时间撞到缺失的边界。

10.5. 割点和共轭点

从 p 出发的测地线在某段时间内最短，但可能在某点后失去最短性。最远仍保持最短的边界形成割点现象。

Jacobi 场描述测地线族的一阶变化，满足：

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \gamma')\gamma' = 0 \quad (102)$$

若非零 Jacobi 场在一条测地线的两个点消失，这两个点互为共轭点。曲率通过 Jacobi 方程控制邻近测地线是聚拢还是分散。

10.6. 逻辑关系

- 测地线由 Levi-Civita 联络定义。

- 变分法说明测地线为什么与最短路有关。
- 指数映射把切空间中的直线方向投到流形。
- 完备性保证测地线不会在有限时间无故终止。
- 割点和共轭点解释局部最短性怎样失效。

11. 曲率张量

11.1. Riemann 曲率

曲率张量定义为：

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (103)$$

它测量二阶协变导数不交换的程度，也测量向量沿无穷小闭合回路平行移动后不能回到原方向的程度。

坐标分量可以写成：

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \quad (104)$$

不同教材可能交换指标次序或给 R 整体加负号。使用曲率公式时必须先确认约定。

把一个指标用度量降下来：

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \quad (105)$$

它满足若干对称性：

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) \quad (106)$$

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z) \quad (107)$$

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y) \quad (108)$$

第一 Bianchi 恒等式：

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \quad (109)$$

11.2. 截面曲率

给定线性无关切向量 u, v ，它们张成二维平面 σ 。截面曲率定义为：

$$\sec(\sigma) = \frac{g(R(u, v)v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2} \quad (110)$$

若 u, v 正交归一，则：

$$\sec(\sigma) = g(R(u, v)v, u) \quad (111)$$

截面曲率是二维 Gaussian 曲率在高维中的推广。一个点的所有截面曲率可以恢复完整 Riemann 曲率张量。

11.3. Ricci 曲率和标量曲率

取正交归一基 $e_1, \dots, e_n$ 。Ricci 曲率是曲率张量的迹：

$$\text{Ric}(v, v) = \sum_i g(R(e_i, v)v, e_i) \quad (112)$$

当 $|v| = 1$ 时，它是所有包含 v 的正交截面曲率之和。

标量曲率再取一次迹：

$$\text{Scal} = \sum_i \text{Ric}(e_i, e_i) = 2 \sum_{i < j} \sec(e_i, e_j) \quad (113)$$

在二维中：

$$\text{Scal} = 2K \quad (114)$$

信息量逐级减少：

$$\text{Riemann 曲率} \rightarrow \text{截面曲率} \rightarrow \text{Ricci 曲率} \rightarrow \text{标量曲率} \quad (115)$$

严格地说，全部截面曲率仍能决定 Riemann 曲率；Ricci 和标量曲率则是压缩后的平均信息。

11.4. 常曲率空间

若所有点、所有二维切平面的截面曲率都等于常数 c ，则：

$$R(X, Y)Z = c(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \quad (116)$$

并且：

$$\text{Ric} = (n-1)cg, \quad \text{Scal} = n(n-1)c \quad (117)$$

三个基本模型：

- 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ ： $c = 0$ ；
- 半径 r 的球面 $S^{n(r)}$ ： $c = \frac{1}{r^2}$ ；
- 双曲空间 $\mathbb{H}^{n(r)}$ ： $c = -\frac{1}{r^2}$ 。

11.5. 曲率正性的强弱

在维数至少 3 时：

$$\sec > 0 \Rightarrow \text{Ric} > 0 \Rightarrow \text{Scal} > 0 \quad (118)$$

反向一般不成立。正截面曲率要求每个二维方向都为正；正 Ricci 曲率只要求围绕每个向量的截面曲率之和为正；正标量曲率只要求所有截面曲率的总和为正。

因此，把一个关于正截面曲率的猜想改成正 Ricci 曲率或正标量曲率，通常会变成完全不同的问题。

11.6. Jacobi 场的曲率直觉

设 γ 是测地线， J 与 γ' 正交。Jacobi 方程近似为：

$$J'' + \sec(\gamma', J)|\gamma'|^2 J = 0 \quad (119)$$

- 正截面曲率使邻近测地线倾向于重新聚拢，类似球面经线。
- 零曲率使测地线保持线性分离，类似欧氏平面直线。
- 负截面曲率使邻近测地线倾向于指数分离，类似双曲平面。

这是比较几何背后的基本动力学图像。

12. 一个完整的坐标计算流程

给定局部坐标中的度量：

$$g = g_{ij} dx^i dx^j \quad (120)$$

通常按以下顺序计算：

1. 写出度量矩阵 (g_{ij}) 。
2. 求逆矩阵 (g^{ij}) 和 $\det g$ 。
3. 用度量的一阶导数计算 Γ_{ij}^k 。
4. 用 Γ 的一阶导数和二次项计算 R_{ijk}^l 。
5. 缩并得到 Ric_{ij} 和 Scal 。
6. 把 Γ 代入测地线方程。

12.1. 欧氏平面的极坐标

极坐标度量为：

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (121)$$

非零 Christoffel 符号包括：

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \quad (122)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad (123)$$

虽然 Γ 不为零，Riemann 曲率仍为零。这说明 Christoffel 符号可以仅由弯曲的坐标系产生，不代表空间本身弯曲。

12.2. 球面坐标

半径 r 的二维球面度量为：

$$g = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (124)$$

计算得到：

$$K = \frac{1}{r^2} \quad (125)$$

这个曲率无法通过换坐标消除。可以在一点选择法坐标使 $\Gamma(p) = 0$ ，但曲率张量在该点仍然非零。

12.3. 计算时的常见检查

- (g_{ij}) 应对称正定。
- Levi-Civita 联络满足 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ 。
- 曲率分量应满足反对称性和 Bianchi 恒等式。
- 欧氏空间换成任意坐标后，最终曲率仍应为 0。
- 二维结果应满足 $\text{Scal} = 2K$ 。
- 常曲率模型应满足 $\text{Ric} = (n-1)cg_0$ 。

13. 子流形几何

13.1. 切空间和法空间分解

设 M^m 等距嵌入 Riemann 流形 $(M)^n$ 。沿 M 有正交分解：

$$T_p |(M) = T_p M + T_p M^\perp \quad (126)$$

环境空间的 Levi-Civita 联络可以分成切向和法向部分。Gauss 公式为：

$$|(\nabla)_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y) \quad (127)$$

其中 $\nabla_X Y$ 是切向部分， $\Pi(X, Y)$ 是第二基本形式，取值于法空间。

13.2. 平均曲率和极小子流形

取 $T_p M$ 的正交归一基 $e_1, \dots, e_m$ ，平均曲率向量定义为：

$$H = \frac{1}{m} \sum_i \Pi(e_i, e_i) \quad (128)$$

若：

$$H = 0, \quad (129)$$

则称 M 是极小子流形。这里“极小”首先表示面积泛函的一阶变分为零，不保证它在所有变分下真的是局部最小值。

对 $\mathbb{R}^3$ 中的定向曲面，平均曲率向量与前面主曲率平均值 $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ 对应。

13.3. Gauss 方程

子流形的内蕴曲率、环境曲率和第二基本形式满足：

$$g(R(X, Y)Z, W) = |(g)(|(R)(X, Y)Z, W) + |(g)(\Pi(X, W), \Pi(Y, Z)) - |(g)(\Pi(X, Z), \Pi(Y, W)) \quad (130)$$

对 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面，环境曲率为零，Gauss 方程化为：

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad (131)$$

这再次说明曲面的内蕴 Gaussian 曲率由外蕴弯曲的两个主方向共同决定。

13.4. Gauss-Codazzi 方程

并不是任意第一、第二基本形式都来自某个实际曲面。Gauss 方程给出曲率兼容条件，Codazzi 方程给出第二基本形式导数的兼容条件。

曲面的基本定理大意是：在单连通区域上，若第一、第二基本形式满足 Gauss-Codazzi 方程，就能在刚体运动意义下唯一重建局部曲面。

13.5. 逻辑关系

- 第二基本形式比较子流形联络与环境联络。
- 平均曲率控制体积的一阶变分。
- Gauss 方程连接内蕴曲率和外蕴弯曲。
- 极小曲面、平均曲率流和广义相对论中的嵌入问题都建立在这些对象上。

14. 整体微分几何

局部公式描述一点附近的几何，整体定理则把曲率假设转化为整个空间的拓扑和度量结论。

14.1. Gauss-Bonnet 定理

对闭的定向曲面 M ：

$$\int_M K \, dA = 2\pi \chi(M) \quad (132)$$

左边由 Riemann 度量和 Gaussian 曲率计算，右边是拓扑不变量 Euler 示性数。

例如：

$$\chi(S^2) = 2 \Rightarrow \int_{S^2} K \, dA = 4\pi \quad (133)$$

$$\chi(T^2) = 0 \Rightarrow \int_{T^2} K \, dA = 0 \quad (134)$$

因此环面不可能处处具有正 Gaussian 曲率，也不可能处处具有负 Gaussian 曲率。

有边界的曲面还要加入边界的测地曲率项；带角点时再加入外角项。它们共同保证总曲率只依赖拓扑。

14.2. Chern–Gauss–Bonnet 定理

对闭定向偶维流形 M^{2m} ：

$$\chi(M) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_M \text{Pf}(\Omega) \quad (135)$$

其中 Ω 是曲率形式矩阵，Pf 是 Pfaffian。它把二维 Gauss–Bonnet 推广到任意偶数维。

高维 Euler 形式是许多曲率分量乘积的带符号组合。即使所有截面曲率都为正，也不能直接看出 Pf(Ω) 逐点为正；这正是 Hopf 示性数猜想困难的来源。

14.3. Bonnet–Myers 定理

若完整 n 维 Riemann 流形满足：

$$\text{Ric} \geq (n-1)kg, \quad k > 0 \quad (136)$$

则：

$$\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} \quad (137)$$

并且 M 紧致、基本群有限。

正 Ricci 曲率通过 Jacobi 场和共轭点控制测地线，使空间不能无限延伸。

14.4. Cartan–Hadamard 定理

若完整、单连通 Riemann 流形满足：

$$\sec \leq 0, \quad (138)$$

则对任意 $p \in M$ ：

$$\text{Exp}_p : T_p M \rightarrow M \quad (139)$$

是全局微分同胚。因此 M 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$ ，任意两点之间有唯一测地线。

负或非正曲率使测地线发散，从而减少共轭点和多条最短路造成的复杂性。

14.5. Synge 定理

对正截面曲率的紧致流形：

- 若维数为偶数且流形可定向，则它单连通。

- 若维数为奇数，则它可定向。

这个定理展示了曲率、维数、定向性和基本群之间的直接联系。Hopf 猜想在四维成立，也可以结合 Synge 定理和 Poincaré 对偶来理解。

14.6. 比较几何

比较几何把一般流形与常曲率模型比较。

Rauch 比较定理：比较 Jacobi 场和测地线发散速度。

Toponogov 比较定理：在截面曲率下界条件下，把测地三角形与常曲率模型三角形比较。

Bishop–Gromov 比较定理：在 Ricci 曲率下界条件下，控制测地球体积增长。

逻辑关系：

- 截面曲率直接控制二维测地变分和三角形。
- Ricci 曲率控制许多方向的平均聚焦和体积增长。
- 曲率下界常导出直径、体积、基本群和拓扑型的限制。

15. 特征类和曲率

向量丛可能在局部看起来像乘积，却在整体上发生扭曲。特征类用上同调类记录这种整体扭曲。

常见特征类包括：

- Euler 类；
- Chern 类；
- Pontryagin 类；
- Stiefel–Whitney 类。

Chern–Weil 理论从联络曲率构造闭微分形式，并证明其 de Rham 上同调类与联络选择无关。例如 Euler 类的积分给出 Euler 示性数。

这条逻辑链非常重要：

$$\text{联络} \rightarrow \text{曲率} \rightarrow \text{闭微分形式} \rightarrow \text{上同调类} \rightarrow \text{拓扑不变量} \quad (140)$$

局部改变度量和联络会改变曲率形式的具体表达，但不会改变最终的特征类。

16. 与 Hopf 猜想的接口

有了前面的语言，可以准确表述 Hopf 示性数猜想：

若闭的偶维 Riemann 流形 M^{2m} 满足 $\sec > 0$ ，是否一定有 $\chi(M) > 0$ ？

这句话连接了三个层次：

- $\sec > 0$ 是每一点、每个二维切平面上的局部几何条件。
- $\chi(M)$ 是由同调群决定的整体拓扑不变量。
- Chern–Gauss–Bonnet 提供曲率积分公式，但没有自动给出高维 Euler 形式的符号。

$S^2 \times S^2$ 问题是另一项常被称为 Hopf 猜想的问题。标准乘积度量满足 $\sec \geq 0$ ，但由两个不同球面因子方向张成的混合平面曲率为 0。问题是能否选择另一种度量，使所有截面曲率同时严格为正。

理解这两个问题至少需要以下依赖链：

$$\text{切空间} \rightarrow \text{Riemann 度量} \rightarrow \text{Levi-Civita 联络} \rightarrow \text{截面曲率} \quad (141)$$

$$\text{微分形式} \rightarrow \text{de Rham 上同调} \rightarrow \text{Euler 类} \rightarrow \text{Euler 示性数} \quad (142)$$

前一条是几何线，后一条是拓扑线。Hopf 猜想困难，正因为它要求在一般高维流形上把两条线精确连接起来。

17. 常见混淆

曲率与弯曲外观：

- 圆柱在 $\mathbb{R}^3$ 中看起来弯曲，但内蕴 Gaussian 曲率为 0。
- Gaussian 曲率是曲面内部可以测量的量，平均曲率依赖嵌入。

Christoffel 符号与曲率：

- Γ_{ij}^k 可以因坐标选择而非零。
- 曲率张量是否为零是坐标无关的事实。
- 可以在一点令 $\Gamma = 0$ ，但一般不能同时令曲率为 0。

测地线与最短路：

- 测地线是长度或能量泛函的局部临界曲线。
- 短测地线段局部最短，长测地线段可能越过割点后失去最短性。

内蕴与外蕴：

- Riemann 度量、Levi-Civita 联络、测地线和 Riemann 曲率是内蕴对象。
- 第二基本形式、形算子和平均曲率需要给定嵌入。
- Gaussian 曲率可以由外蕴主曲率计算，但最终是内蕴量。

不同曲率条件：

- 正截面曲率最强，要求每个二维方向都为正。
- 正 Ricci 曲率是方向平均条件。
- 正标量曲率是更粗的总平均条件。
- 从弱曲率条件得到的结论不能自动套到强曲率猜想上，反之亦然。

18. 更高阶方向

完成基础内容后，可以继续深入：

- 比较几何和刚性定理。
- 极小曲面与几何测度论。
- Ricci flow 和平均曲率流。
- Kähler 几何与复微分几何。
- 辛几何和 Hamilton 系统。
- Lie 群与齐性空间。
- 几何分析和非线性偏微分方程。
- 指标定理和全局分析。
- 广义相对论中的 Lorentz 几何。
- 几何拓扑和规范场论。

依赖关系大致为：

- Riemann 曲率 $\rightarrow$ 比较几何、Ricci flow、Einstein 度量。
- 第二基本形式 $\rightarrow$ 极小曲面、平均曲率流。
- 微分形式和上同调 $\rightarrow$ 辛几何、特征类、指标定理。
- 复流形加 Hermitian 度量 $\rightarrow$ Kähler 几何。
- 流形上的变分法和 PDE $\rightarrow$ 几何分析。

19. 推荐学习顺序

1. 先学欧氏空间曲线和曲面的第一、第二基本形式。
2. 接着学光滑流形、切空间、余切空间和光滑映射。
3. 再学张量、微分形式、外微分和 Stokes 定理。
4. 然后学 Riemann 度量、Levi-Civita 联络和平行移动。
5. 接着学测地线、指数映射、完备性和 Jacobi 场。
6. 再系统学习 Riemann、截面、Ricci 和标量曲率。
7. 最后学习 Gauss-Bonnet、比较定理、特征类和几何分析。

最小闭环：

1. 流形和坐标图
2. 切空间
3. Riemann 度量
4. Levi-Civita 联络
5. 测地线
6. 曲率张量
7. 截面曲率
8. Gauss-Bonnet 定理

如果这个闭环清楚，就能看懂大多数 Riemann 几何基础材料，也能理解 Hopf 猜想为什么是“局部曲率控制整体拓扑”的典型难题。