

Hopf 猜想

正曲率能否决定空间的整体拓扑？

微分几何里有两类问题都常被称为“Hopf 猜想”。第一类问：偶数维闭流形处处具有正截面曲率时，它的 Euler 示性数是否一定为正？第二类问： $S^2 \times S^2$ 能否承载处处正的截面曲率？

它们共享同一个主题：**局部曲率条件究竟能多强地限制整体拓扑**。但二者不是同一个命题，后文会始终把它们称为“示性数版本”和“乘积版本”。

目录

1. 三个前置概念	2
1.1. 闭 Riemann 流形	2
1.2. 截面曲率	2
1.3. Euler 示性数	2
2. 示性数版本	2
2.1. 二维为什么成立	2
2.2. 四维为什么也成立	3
3. Gauss–Bonnet 为何没有直接解决高维情形	3
4. 乘积版本： $S^2 \times S^2$	3
4.1. 它明明有非负曲率	4
4.2. 为什么不能靠小扰动轻易解决	4
4.3. 它与示性数版本是什么关系	4
5. 已知进展说明了什么	4
6. 常见误解	5
7. 一句话理解	5
8. 参考资料	5

1. 三个前置概念

1.1. 闭 Riemann 流形

流形可以粗略理解为“每个很小的局部都像欧氏空间”的空间。给流形装上 Riemann 度量 g 后，就能谈长度、角度、面积、测地线和曲率。

“闭流形”指紧致且没有边界的流形。球面 S^2 、高维球面 S^n 和环面 T^2 都是闭流形；欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 不是紧致的，因此不是闭流形。

1.2. 截面曲率

在曲面上，每一点只有一个二维切平面，高斯曲率 K 给出该点的弯曲程度。在 $n \geq 3$ 维时，一个点的切空间中有许多二维平面，所以要为每个二维方向 $\sigma \subset T_p M$ 分别定义截面曲率

$$\sec_{p(\sigma)} \cdot \tag{1}$$

正截面曲率

若对每个点 $p \in M$ 和每个二维切平面 $\sigma \subset T_p M$ 都有

$$\sec_{p(\sigma)} > 0, \tag{2}$$

就称 (M, g) 具有正截面曲率。把 $>$ 换成 $\geq$ ，得到非负截面曲率。

这是一个很强的逐点、逐方向条件。正 Ricci 曲率或正标量曲率只控制若干截面曲率的和，明显弱于所有截面曲率都为正。

1.3. Euler 示性数

Euler 示性数 $\chi(M)$ 是拓扑不变量，不随度量的改变而改变。用实系数 Betti 数表示，它是

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(M), \tag{3}$$

其中 b_i 粗略记录 i 维“洞”的数量。

空间	χ	直观或计算
S^{2m}	2	偶维球面只有 $b_0 = b_{2m} = 1$ 。
S^{2m+1}	0	奇维球面的两项在交错和中抵消。
T^2	0	$1 - 2 + 1 = 0$ 。
$\mathbb{C}P^m$	$m + 1$	偶数维同调群各贡献 1。
$S^2 \times S^2$	4	$\chi(S^2)\chi(S^2) = 2 \cdot 2$ 。

截面曲率依赖所选度量，是几何量；Euler 示性数不依赖度量，是拓扑量。Hopf 猜想要建立的正是二者之间的桥梁。

2. 示性数版本

Hopf 示性数猜想

若 M^{2m} 是具有正截面曲率的闭 Riemann 流形，则

$$\chi(M) > 0. \tag{4}$$

还有一个自然的非负曲率版本：若 $\sec \geq 0$ ，是否必有 $\chi(M) \geq 0$ ？正曲率命题和非负曲率命题要分开看，因为从严格不等式退化到非严格不等式后，会出现平坦方向和乘积分解等新现象。

2.1. 二维为什么成立

对闭的定向曲面，Gauss–Bonnet 定理给出

$$\int_M K \, dA = 2\pi\chi(M). \quad (5)$$

二维的截面曲率就是高斯曲率。若处处 $K > 0$ ，左边严格为正，因此

$$\chi(M) > 0. \quad (6)$$

这说明猜想在二维几乎是 Gauss–Bonnet 定理的直接推论。事实上，闭的定向曲面满足 $\chi = 2 - 2g$ ，其中 g 是亏格；正曲率迫使 $g = 0$ ，所以它在拓扑上就是球面。

2.2. 四维为什么也成立

四维可以利用 Sygne 定理和 Poincaré 对偶来处理。若 M^4 可定向并有正截面曲率，Synge 定理推出它单连通，于是

$$b_1(M) = b_3(M) = 0. \quad (7)$$

再由 $b_0 = b_4 = 1$ ，得到

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 2 + b_2 > 0. \quad (8)$$

不可定向情形可以转到定向双覆盖；Euler 示性数在有限覆盖下按覆盖次数相乘。因而四维也满足猜想。

低维结论

Hopf 示性数猜想在维数 2 和 4 成立。真正的新困难从更高偶数维开始。

3. Gauss–Bonnet 为何没有直接解决高维情形

Chern–Gauss–Bonnet 定理在 $2m$ 维仍把 Euler 示性数写成曲率积分：

$$\chi(M) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_M \text{Pf}(\Omega). \quad (9)$$

这里 Ω 是曲率形式矩阵，Pf 是 Pfaffian。二维时，被积函数本质上就是高斯曲率，所以 $K > 0$ 会直接给出正积分。

高维情况不同。Pf(Ω) 是许多曲率张量分量乘积的带符号组合；“每个二维截面的曲率都为正”并不会显然推出

$$\text{Pf}(\Omega)(p) > 0 \quad (10)$$

在每一点成立。也就是说，积分公式确实存在，但它的被积函数没有从假设中得到明显的逐点符号。

核心障碍

Hopf 猜想不是缺少一个高维 Gauss–Bonnet 公式；公式早已存在。困难在于，截面曲率的正性无法直接转化为 Euler 形式的逐点正性。

这也解释了为什么把二维证明机械推广到高维行不通：二维只有一个截面方向，高维却需要把大量彼此耦合的曲率分量组合起来。

4. 乘积版本： $S^2 \times S^2$

Hopf 乘积猜想的基本特例

$S^2 \times S^2$ 不存在处处具有正截面曲率的 Riemann 度量。

更一般的表述会猜测，两个正维闭流形的乘积不能承载正截面曲率；其中 $S^2 \times S^2$ 是最经典、最基本的测试对象。

4.1. 它明明有非负曲率

给两个 S^2 都装上标准圆球度量，再取乘积度量。完全位于某个球面因子内的二维平面具有正曲率；但由两个不同因子的方向张成的“混合平面”满足

$$\sec(\sigma_{\text{mixed}}) = 0. \quad (11)$$

所以标准乘积度量满足 $\sec \geq 0$ ，却不满足 $\sec > 0$ 。问题是：能否不拘泥于乘积形式，换一个更巧妙的度量，把所有混合方向的零曲率同时抬高？至今没有人知道答案。

4.2. 为什么不能靠小扰动轻易解决

直觉上，可以尝试轻微改变乘积度量，让原来的零曲率变成正数。但零曲率平面形成一个很大的连续族；一个扰动可能抬高某些方向，同时压低另一些方向。要得到正截面曲率，必须在每一点、每个二维方向上同时保持严格正值。

这是一组无限多、彼此耦合的不等式。对某个固定平面计算曲率变化并不困难，困难的是构造一个度量变化，使所有原本为零的平面都朝正确方向变化，而且不破坏原有的正曲率方向。

4.3. 它与示性数版本是什么关系

$S^2 \times S^2$ 的 Euler 示性数为

$$\chi(S^2 \times S^2) = 4 > 0. \quad (12)$$

因此它完全符合示性数猜想所要求的必要符号。即使示性数版本得到证明，也不能排除 $S^2 \times S^2$ 的正曲率度量；乘积版本需要比 Euler 示性数更精细的拓扑或几何障碍。

不要混淆两个命题

示性数版本说“正曲率 $\Rightarrow \chi > 0$ ”；乘积版本猜测“ $S^2 \times S^2$ 没有正曲率度量”。由于 $S^2 \times S^2$ 本来就有 $\chi = 4$ ，前者不能推出后者。

5. 已知进展说明了什么

一般的示性数猜想仍然开放，但加入足够强的对称性后已经得到许多肯定结果。典型做法是让环面 T^k 等紧 Lie 群等距作用在 M 上，再利用固定点集、闭测地线、同调周期性和群作用结构，把曲率条件转化成拓扑限制。

例如，已有结果在低余维群作用或高对称秩等附加条件下证明 $\chi(M) > 0$ ；后续工作又把某些结论所需的环面对称维数继续降低。PÜTTMANN--SEARLE NIENHAUS

这些定理表明猜想与正曲率流形的对称结构高度相容，但不能覆盖一般情形：一个正曲率度量完全可能只有很小甚至有限的等距群。

对 $S^2 \times S^2$ 而言，Hsiang-Kleiner 的四维结果给出了更直接的限制：具有正截面曲率且承认非平凡连续等距对称的闭定向四维流形，在拓扑上只能是 S^4 或 CP^2 。因此，若 $S^2 \times S^2$ 真有正曲率度量，它不能带有这种连续对称；只在熟悉的高度对称候选中搜索不足以解决问题。HSIANG--KLEINER

目前可以确认的边界

我们知道许多正曲率空间的 Euler 示性数为正，也知道猜想在低维或较强对称性条件下成立；但一般的高维示性数版本仍未解决， $S^2 \times S^2$ 是否能承载正截面曲率也仍未解决。KENNARD--MOUILLÉ--NIENHAUS

6. 常见误解

说法	问题在哪里
“正 Ricci 曲率就足够了。”	Ricci 曲率只对截面曲率求和，比正截面曲率弱得多，不能直接代替猜想的假设。
“Chern–Gauss–Bonnet 已经证明了猜想。”	它给出积分公式，却没有保证高维 Euler 形式在正截面曲率下逐点为正。
“ $S^2 \times S^2$ 的乘积度量就是正曲率。”	混合二维平面的截面曲率为零，所以它只有非负曲率。
“示性数猜想成立就能解决乘积版本。”	$S^2 \times S^2$ 已经满足 $\chi = 4 > 0$ ，示性数的符号不足以排除正曲率。

7. 一句话理解

总结

Hopf 示性数猜想问局部的正截面曲率是否迫使偶维闭流形具有正 Euler 示性数； $S^2 \times S^2$ 问题则展示了非负曲率与正曲率之间极难跨越的边界。二者都在追问：曲率究竟能看见多少拓扑信息？

8. 参考资料

- Püttmann–Searle：低余维或高对称秩下的 Hopf 猜想。
- Hsiang–Kleiner：带连续对称的正曲率四维流形。
- Nienhaus：四周周期性定理与带对称的 Hopf 猜想。
- Kennard–Mouillé–Nienhaus：Hopf 猜想与中间 Ricci 曲率。