

有趣的数学分析主题

本笔记将探讨几个相互关联的深刻数学主题：从经典的级数理论，到超越数的概念，再到五次方程的不可解性，以及复变函数在实积分计算中的应用。

1. 调和级数

定义 1.1: 调和级数是指如下无穷级数：

$$H_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (1)$$

调和级数是人类最早研究的级数之一。尽管其通项 $\frac{1}{n}$ 趋于 0，但这个级数却是发散的。

定理 1.1: 调和级数发散: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

证明：这里给出经典的柯西凝聚判别法证明，以及更直观的分组证明。

方法一：分组证明

我们将级数按如下方式分组：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \quad (2)$$

注意到：

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

一般地，第 k 组（包含 2^k 项）满足：

$$\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}+1} \frac{1}{n} > 2^k \times \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

因此：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty \quad (6)$$

方法二：积分判别法

考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，它是正的、连续且递减的。由于：

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = +\infty \quad (7)$$

由积分判别法，调和级数发散。

■

例 1.1: 调和级数的部分和与对数函数有密切关系：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma \quad (8)$$

其中 $\gamma \approx 0.5772$ 称为**欧拉-马歇罗尼常数**。这是一个著名的未解决问题： γ 是否是有理数？目前尚不知道。

2. 自然常数 e 及其导数

2.1. e 的多种定义

自然常数 e 是数学中最重要的常数之一，可以通过多种等价的方式定义：

定义 2.1.1: 自然常数 e 的等价定义：

- 极限定义:** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$
- 级数定义:** $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
- 积分定义:** e^x 是满足 $f'(x) = f(x)$ 且 $f(0) = 1$ 的唯一函数在 $x = 1$ 处的值。
- 对数定义:** e 是满足 $\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$ 的唯一正实数。

这些定义的等价性可以通过分析学的方法加以证明。其中级数定义特别有用，因为它直接展示了 e 是无理数（事实上是超越数）。

2.2. e^x 导数的证明

定理 2.2.1: 设 $f(x) = e^x$ ，则 $f'(x) = e^x$ ，即 $(e^x)' = e^x$ 。

证明：我们使用 e 的级数定义来证明这一性质。

首先， e^x 可以通过幂级数定义：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (9)$$

该幂级数的收敛半径为 $+\infty$ （由比值判别法），因此可以逐项求导。

对两边求导：

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \quad (11)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \quad (12)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad (13)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad (m = n-1) \quad (14)$$

$$= e^x \quad (15)$$

证毕。 ■

例 2.2.1: 利用极限定义的替代证明:

从极限定义出发:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \quad (16)$$

关键步骤是证明 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ 。

利用 $e^h = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n$, 对小的 h 有:

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx \frac{\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1}{h} \quad (17)$$

当 n 足够大时, $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \approx 1 + h + O\left(\frac{h^2}{n}\right)$, 因此:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad (18)$$

3. 超越数

3.1. 代数数与超越数

定义 3.1.1: 一个复数 α 称为**代数数**, 如果存在非零整系数多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 使得 $P(\alpha) = 0$ 。

不是代数数的复数称为**超越数**。

例 3.1.1:

- 所有有理数 $\frac{p}{q}$ 都是代数数 (是 $qx - p = 0$ 的根)
- $\sqrt{2}$ 是代数数 (是 $x^2 - 2 = 0$ 的根)
- $\sqrt[3]{5}$ 是代数数
- $i = \sqrt{-1}$ 是代数数 (是 $x^2 + 1 = 0$ 的根)

3.2. 著名超越数

定理 3.2.1:

1. (林德曼-魏尔斯特拉斯定理, 1885): 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是互不相同的代数数, 则 $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_n}$ 在代数数域上线性无关。
2. 特别地, e 和 π 都是超越数。

例 3.2.1: π 的超越性证明了古希腊“化圆为方”问题用尺规作图是不可能的。因为如果可作, 则 $\sqrt{\pi}$ 将是代数数, 从而 π 也是代数数。

4. 五次方程的不可解性

这是代数学史上最深刻的结果之一, 由伽罗瓦 (Évariste Galois) 在 19 世纪初创立的理论所揭示。

4.1. 根式可解的定义

定义 4.1.1: 一个多项式方程 $P(x) = 0$ 称为**根式可解**, 如果它的根可以通过有限次加、减、乘、除和开 n 次方运算 (从方程的系数出发) 表示出来。

例 4.1.1:

- 一次方程: $ax + b = 0$, 解为 $x = -\frac{b}{a}$
- 二次方程: $ax^2 + bx + c = 0$, 解为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 三次和四次方程也有类似的求根公式 (但更为复杂)

4.2. 伽罗瓦理论的核心思想

伽罗瓦的关键洞察是: 将方程的根的对称性与**伽罗瓦群**的结构联系起来。

定义 4.2.1: 设 $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 是不可约多项式, K 是其分裂域。 P 的**伽罗瓦群** $\text{Gal}(\frac{K}{\mathbb{Q}})$ 是保持 $\mathbb{Q}$ 不动的 K 的自同构群。

定理 4.2.1: (伽罗瓦判别法) 多项式 $P(x)$ 根式可解当且仅当其伽罗瓦群是可解群。

4.3. S_5 的不可解性

定理 4.3.1: 一般五次方程 $x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$ 不是根式可解的。

证明：证明概要：

- 一般五次方程的伽罗瓦群是对称群 S_5 。
- 对于 $n \geq 5$ ，交错群 A_n 是单群（没有非平凡的正规子群）。
- S_5 的合成列为： $\{e\} \triangleleft A_5 \triangleleft S_5$
- 由于 A_5 是单群且非阿贝尔群，它不是循环群。
- 因此 S_5 不是可解群（可解群要求所有合成因子都是素数阶循环群）。
- 由伽罗瓦判别法，一般五次方程不是根式可解的。

具体而言， A_5 的阶为 $\frac{5!}{2} = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ，它是一个非阿贝尔单群。这意味着不存在正规子群列使得每个商群都是阿贝尔群。 ■

例 4.3.1: 方程 $x^5 - x + 1 = 0$ 就是一个具体的五次方程，其伽罗瓦群是 S_5 ，因此不能用根式求解。

5. 复变函数方法计算实积分

复变函数论为计算某些困难的实积分提供了强大的工具，特别是留数定理的应用。

5.1. 问题陈述

计算积分：

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad (19)$$

5.2. 留数定理回顾

定理 5.2.1: (留数定理) 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 及其内部除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 外解析，则：

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \quad (20)$$

5.3. 积分计算

定理 5.3.1: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$

证明：考虑复变函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 。该函数在复平面上有两个一阶极点：

$$z^2 + 1 = 0 \implies z = \pm i \quad (21)$$

构造积分围道：以原点为中心，半径为 $R > 1$ 的上半圆。围道由两部分组成：

- C_R ：上半圆弧 $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$
- $[-R, R]$ ：实轴上的线段

由留数定理：

$$\int_{[-R, R] \cup C_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, i) \quad (22)$$

计算在 $z = i$ 处的留数：

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{2i} \quad (23)$$

因此：

$$\int_{[-R, R] \cup C_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi \quad (24)$$

现在证明当 $R \rightarrow \infty$ 时，沿 C_R 的积分趋于 0：

在 C_R 上， $|z| = R$ ，所以：

$$|1 + z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 \quad (25)$$

因此：

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \text{length}(C_R) \cdot \max_{z \in C_R} |f(z)| \quad (26)$$

$$= \pi R \cdot \frac{1}{R^2 - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (27)$$

取极限 $R \rightarrow \infty$ ：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \quad (28)$$

■

例 5.3.1: 当然, 这个积分也可以用初等方法计算:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad (29)$$

因此:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} [\arctan a - \arctan(-a)] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad (30)$$

复变方法的优势在于可以处理更复杂的积分, 如:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \quad (31)$$

这类积分用实分析方法很难计算。

6. 总结

本笔记探讨了数学分析中的几个深刻主题:

- 调和级数**的发散性展示了无穷级数的微妙性质。
- 自然常数 e** 的多种定义方式体现了数学概念的丰富性, 其自守性质 (导数等于自身) 使其成为分析学的核心。
- 超越数**的概念区分了代数结构和超越结构, 林德曼-魏尔斯特拉斯定理是这一领域的巅峰成就。
- 五次方程不可解**是代数学的里程碑, 伽罗瓦群论的思想彻底改变了现代数学的面貌。
- 复变函数**方法展示了不同数学分支之间的深刻联系, 留数定理将复分析的技巧应用于实积分的计算。

这些主题看似分散, 实则统一于数学对“结构”和“对称性”的深刻理解之中。

7. 参考文献

- Ahlfors, L. V. (1979). **Complex Analysis**. McGraw-Hill.
- Edwards, H. M. (1984). **Galois Theory**. Springer.
- Rudin, W. (1976). **Principles of Mathematical Analysis**. McGraw-Hill.
- 华罗庚 (1979). 《数论导引》. 科学出版社.