

2026 AI 数学突破实录

OpenAI / ChatGPT 与 Claude：从猜想反例到机器可检验证明

资料截点：2026 年 8 月 28 日

目录

1. 问题的精确定义	2
2. 从可手算的范例开始	2
3. Erdős 猜想到底猜了什么	3
4. 2026 年的反例如何否定它	3
5. 从二维平方和到高次代数数域	3
6. 现在还剩下什么	4
7. 参考资料	4

1. 问题的精确定义

在欧氏平面中取一个有限点集 P 。把距离恰好为 1 的两个点连边，并记这样的**无序点对**总数为 $\nu(P)$ 。固定点数后，再对所有可能的摆法取最大值：

$$\nu(n) := \max_{P \subset \mathbb{R}^2, |P|=n} \nu(P). \quad (1)$$

所谓“单位”没有特殊性：如果关心距离 $r > 0$ ，把整幅图按比例 $\frac{1}{r}$ 缩放，就又变成距离 1。因此问题真正问的是：**平面上 n 个不同点，最多能让多少点对具有同一个指定距离？**

也可以把它看成图论问题。点是顶点，单位距离点对是边，所得图称为单位距离图； $\nu(n)$ 就是 n 个顶点的平面单位距离图所能拥有的最大边数。这里不要求连边不能交叉，也不要求所有没连边的点对距离不同。

三个容易混淆的问题

这不是“整数格点之间有多少条长度为 1 的边”，因为点可以摆在平面任意位置；也不是 Hadwiger-Nelson 平面染色问题；更不是 Erdős 的“不同距离问题”。它只数某一个固定长度出现了多少次。

2. 从可手算的范例开始

小点集已经能说明，“多造单位距离”不是简单地把点均匀排开。

点的摆法	单位距离数	为什么
直线上等间距的 n 个点	$n - 1$	只有相邻点对相距 1。数量只是线性的。
边长为 1 的正三角形	3	三对点全是单位距离，即 $\nu(3) = 3$ 。
共用一条边的两个正三角形	5	取 $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ 。除上下两个顶点外，其余五对距离都为 1。
边长为 1 的正六边形加中心	12	六条边和六条“半径”都是单位距离。
$m \times m$ 方格，格距为 1	$2m(m - 1)$	横边和竖边各有 $m(m - 1)$ 条；若 $n = m^2$ ，仍只有 $2n - 2\sqrt{n}$ 条。

最后一行看似说明方格没有帮助，其实它只使用了方向 $(\pm 1, 0)$ 与 $(0, \pm 1)$ 。经典构造的关键，是缩放方格，让**许多不同的整数方向同时成为单位向量**。

例如整数方格中的向量

$$(\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1) \quad (2)$$

共有 8 个带符号、带次序的方向，它们的长度都是 $\sqrt{5}$ 。把一个足够大的方格整体缩小 $\sqrt{5}$ 倍后，每个远离边界的点就有至多 8 个单位距离邻点。边界会损失一些边，但方格足够大时，主体仍保留下来。

更一般地，若整数 k 有许多表示

$$k = a^2 + b^2, \quad (3)$$

那么每个解 (a, b) 都给出一个长度 $\sqrt{k}$ 的格点方向。特别地，当 k 是许多互不相同、模 4 余 1 的素数之积时，表示数会随素因子数成指数增长。选好 k 、取一个大方格并按 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 缩放，便能得到

$$\nu(n) \geq n^{1 + \frac{c}{\log \log n}} \quad (4)$$

这一尺度的经典下界，其中 $c > 0$ 是常数。这里额外的指数 $\frac{c}{\log \log n}$ 会趋于 0，所以它虽超线性，却仍是 $n^{1+o(1)}$ 。

平方格点真正提供了什么

不是“最近邻很多”，而是整数的平方和分解能制造很多**同样长度、不同方向**的向量。几何计数由此被翻译成算术中的表示数问题。这正是新反例后来推广到数域的出发点。

3. Erdős 猜想到底猜了什么

1946 年，Erdős 猜想存在绝对常数 $C > 0$ 与 N ，使每个 $n \geq N$ 都满足

$$\nu(n) \leq n^{1+\frac{C}{\log \log n}}. \quad (5)$$

把量词完整写出很重要：

$$\exists C > 0, \exists N, \forall n \geq N : \nu(n) \leq n^{1+\frac{C}{\log \log n}}. \quad (6)$$

它不是猜 $\nu(n) = O(n)$ ，也没有断言某个具体的 C 。它允许单位距离数比线性大很多，只要求超线性的那部分至多是 $n^{O(\frac{1}{\log \log n})}$ 。由于 $\frac{C}{\log \log n} \rightarrow 0$ ，也可以把猜想概括成

$$\nu(n) \leq n^{1+o(1)} \quad (7)$$

的一种定量版本。经典平方格点下界恰好也在 $n^{1+\Theta(\frac{1}{\log \log n})}$ 这个尺度上，因此几十年来的直觉是：平方和构造已经抓住正确的增长类型，剩下只是上下界常数与技术的差别。

从另一端看，1984 年以来最好的通用上界仍是

$$\nu(n) = O\left(n^{\frac{4}{3}}\right). \quad (8)$$

一个直观理由是：以每个点为圆心画单位圆，单位距离就对应“另一个点落在这条圆上”的点圆关联；平面关联几何限制了这种相交能有多密。于是旧局面是

$$n^{1+\Omega(\frac{1}{\log \log n})} \leq \nu(n) \leq O\left(n^{\frac{4}{3}}\right). \quad (9)$$

Erdős 猜想选择相信左端的指数形态，而不是右端的固定幂指数。

4. 2026 年的反例如何否定它

新定理证明：存在一个与 n 无关的绝对常数 $\delta > 0$ ，对无穷多个 n 有

$$\nu(n) \geq n^{1+\delta}. \quad (10)$$

“固定的 δ ”是整个突破的核心。无论猜想允许多大的固定常数 C ，只要 n 足够大，就有

$$\frac{C}{\log \log n} < \delta, \quad (11)$$

从而 $n^{1+\delta} > n^{1+\frac{C}{\log \log n}}$ 。定理又保证这样的反例规模 n 无穷多，因此不可能用增大阈值 N 把它们全部排除。这正好击穿了原猜想中的“存在 C, N ，此后对所有 n 成立”。[OAI-UD-PAPER](#)

这里没有给出一张小反例图

猜想是渐近命题，有限个漂亮点集不能推翻它。新证明给出的是一族规模趋于无穷的构造，并保证其单位距离数有固定的多项式增益。定理只声称存在某个 $\delta > 0$ ，并未把一个漂亮或接近最优的数值当作卖点。

5. 从二维平方和到高次代数数域

新证明保留了经典构造的骨架：先寻找大量“长度相同的方向”，再让许多格点可以沿这些方向平移。真正的新意，是把高斯整数 $\mathbb{Z}[i]$ 中的平方和算术升级到次数不断增长的数域。

可以把证明分成四层理解：

1. **制造许多候选方向。** 取一个高次数全实数域 L ，再加入 i 得到 $K = L(i)$ 。证明构造出指数多个元素 $u \in K$ ，使 $uc(u) = 1$ ；这里 c 是类似复共轭的自同构。
2. **让每个坐标都看见长度 1。** 把 K 通过所有复嵌入放进 $\mathbb{C}^f$ 。因为 $uc(u) = 1$ ，每个嵌入 σ 都满足 $|\sigma(u)| = 1$ 。所以同一个 u 在每个复坐标中都是单位方向。
3. **把方向变成大量边。** 在这个高维嵌入格中截取一个大“多圆盘”窗口。对窗口的平移位置做平均，可以找到一个截面，使许多格点 x 与 $x + u$ 同时留在窗口内；每一对都对应一个候选单位边。
4. **回到真正的平面。** 只投影到第一个复坐标。该投影在所取格点陪集上是单射，不会把不同点压成同一点；同时每个 u 的第一坐标绝对值恰为 1，所以高维中的候选边投影后确实是平面单位距离。

最深的输入藏在第一层：需要次数趋于无穷的全实数域无分歧塔，还要让一批指定素数完全分裂，并把判别式、类数造成的损失控制在指数级。Golod-Shafarevich 理论保证这种塔不会在有限层终止；类群上的抽屉原理再从大量理想分解中提取出足够多的范数 1 元素。UD-REMARKS

为什么“投影回二维”并不神奇地保长度

一般的高维投影当然会改变长度。这里能成功，不是因为投影保距，而是每个特制方向 u 在每一个复坐标中本来就有绝对值 1；选第一坐标后，它仍恰好是单位向量。单射性则另外保证点的数量没有塌缩。

九位数学家随后发表了人类消化版，明确称其为 human-verified version，并梳理了与 Ellenberg-Venkatesh、Golod-Shafarevich 及类域塔方法的联系。这个跨越的本质是：旧构造只从一个固定二维格子的算术中榨取 $n^{o(1)}$ 个方向；新构造让数域次数随规模增长，从而得到指数于次数的方向数，最终在点数中表现为固定幂 n^δ 。

6. 现在还剩下什么

反例改变了下界的性质，却远没有确定 $\nu(n)$ 的真实增长速度。目前可以粗略记成

$$n^{1+\delta} \leq \nu(n) \leq O\left(n^{\frac{4}{3}}\right) \quad (12)$$

其中左式只对某个固定 $\delta > 0$ 和无穷多个 n 保证成立；右式则是对所有 n 的通用上界。两端之间仍有固定的幂指数鸿沟。

具体来说，新结果没有：

- 求出 $\nu(n)$ 的精确渐近式；
- 证明最佳下界指数接近 $\frac{4}{3}$ ；
- 证明对每个充分大的 n 都有同样的 $n^{1+\delta}$ 下界；
- 给出小规模 $\nu(n)$ 的统一最优构型；
- 让单位距离问题、不同距离问题或平面染色问题自动得到解决。

一句话准确总结

被推翻的是“平面单位距离数至多为 $n^{1+O(\frac{1}{\log \log n})}$ ”这一增长形态；仍然开放的是 $\nu(n)$ 究竟以哪个固定幂次、甚至是否以某个稳定幂次增长。

7. 参考资料

单位距离猜想攻破详解：人类数学家离失业还有多远？